

# 分布定数回路の基礎とシミュレーション

ATP(EMTP)の小さな研究室

高橋賢司 著

当研究室のその他の解説書は下記からアクセスできます。  
<http://atp-emtp-research.o.o7.jp/>

I. 単相分布定数回路 .....	7
1. 電信方程式(基礎微分方程式)について .....	7
2. 正弦波交流が印加される分布定数回路の一般解 .....	8
3. 正弦波交流が印加される分布定数回路への一般解の応用 .....	12
3.1 半無限長分布定数回路の境界条件の考察 .....	13
3.2 境界条件から導かれる電圧と電流の式 .....	13
3.3 半無限長分布定数回路上の数式による電圧波形例 .....	14
4. 特性インピーダンス $Z_0$ 、サージインピーダンス、特性アドミッタンス $Y_0$ .....	17
4.1 特性インピーダンス $Z_0$ .....	17
4.2 特性インピーダンスの単位 .....	18
4.3 特性インピーダンスの周波数特性 .....	19
4.4 サージインピーダンス .....	20
4.5 特性アドミッタンス .....	21
5. 単相無損失分布定数回路の一般解(ダランベールの解) .....	21
5.1 ダランベールの解について .....	21
5.2 ダランベールの解のプロット例 .....	24
6. 進行波の伝搬の様子を決める伝搬定数 .....	26
6.1 損失の在る分布定数回路の伝搬定数 .....	26
1) 減衰定数 .....	26
2) 位相定数 .....	27
6.2 無損失分布定数回路の伝搬定数 .....	28
1) 減衰定数 .....	28
2) 位相定数 .....	28
6.3 伝搬定数の単位 .....	28
1) 減衰定数の単位 .....	28
2) 位相定数の単位 .....	30
7. 位相速度 (=伝搬速度)と伝搬速度の単位 .....	30
7.1 位相速度 (=伝搬速度)とは .....	30
7.2 伝搬速度の単位 .....	32
7.3 無損失線路の電圧、電流の伝搬速度 .....	32
7.4 損失が在る分布定数回路の伝搬速度 .....	33
7.5 伝搬速度の単位 .....	33
8. 伝搬定数の周波数特性 .....	34
8.1 位相定数の周波数特性 .....	34
1) 無損失分布定数回路の位相定数の周波数特性 .....	34
2) 損失が在る分布定数回路の位相定数の周波数特性 .....	34
8.2 減衰定数の周波数特性 .....	36
1) 無損失分布定数回路の減衰定数 $\alpha$ の周波数特性 .....	36
2) 損失が在る分布定数回路の減衰定数 $\alpha$ の周波数特性 .....	36
9. 波長 $\lambda$ と位相定数の関連について .....	38
10. 双曲線関数表現の一般解への変換 .....	39
11. 有限長の分布定数回路 .....	40
11.1 終端短絡の有限長分布定数回路 .....	40
11.2 終端短絡の有限長分布定数回路の電圧、電流、インピーダンスのプロット例 .....	42
11.3 終端短絡の無損失有限長分布定数回路 .....	50
11.4 終端開放の有限長分布 .....	53
11.5 終端に任意のインピーダンスが接続された有限長分布定数回路 .....	59
1) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と始端電流 $\dot{I}_s$ が与えられる場合 .....	59
2) 終端電圧 $\dot{V}_r$ 、終端電流 $\dot{I}_r$ が与えられる場合 .....	60

3) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端電圧 $\dot{V}_r$ が与えられる場合 .....	61
4) 始端電流 $\dot{I}_s$ と終端電流 $\dot{I}_r$ が与えられる場合 .....	62
5) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合 .....	63
6) 終端電圧 $\dot{V}_r$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合 .....	63
7) 数式で表された任意の位置 $x$ における電圧 $\dot{V}_x$ 、電流 $\dot{I}_x$ のプロット例 .....	65
7-1) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合 .....	65
8) 位置角、負荷角を用いて任意の位置 $x$ における電圧 $\dot{V}_x$ 、電流 $\dot{I}_x$ を求める .....	67
12. 進行波の反射、透過現象について .....	71
12.1 進行波の反射係数、透過係数 .....	71
1) 電圧の反射係数 $k_{refv}$ .....	71
2) 電圧の透過係数 $k_{pv}$ .....	72
3) 電流の反射係数 $k_{refc}$ .....	72
4) 電流の透過係数 $k_{pc}$ .....	73
12.2 反射、透過の考察 .....	73
1) 線路 2 の特性インピーダンス値 $Z_{02}$ = 線路 1 の特性インピーダンス値 $Z_{01}$ のケース .....	73
a. 電圧の反射 .....	73
b. 電圧の透過 .....	73
c. 電流の反射 .....	74
d. 電流の透過 .....	74
2) 線路 2 の特性インピーダンス値 $Z_{02}$ > 線路 1 の特性インピーダンス値 $Z_{01}$ のケース .....	74
a. 電圧の反射 .....	74
b. 電圧の透過 .....	75
c. 電流の反射 .....	75
d. 電流の透過 .....	76
3) 線路 1 の特性インピーダンス値 $Z_{01}$ > 線路 2 の特性インピーダンス値 $Z_{02}$ のケース .....	76
a. 電圧の反射 .....	76
b. 電圧の透過 .....	76
c. 電流の反射 .....	77
d. 電流の透過 .....	77
13. ATP(EMTP)による分布定数回路のシミュレーション .....	78
13.1 終端短絡の有限長分布定数回路のシミュレーション .....	78
1) 模擬回路構成 .....	78
2) 入力データの作成 .....	78
2-1) 線路モデルと入力する線路定数について .....	78
2-2) 電圧源について .....	82
2-3) 電圧検出プローブと電流検出用 Measuring switch .....	84
2-4) 計算条件の設定 .....	86
2-5) 上記作業で完成した ATPDraw ファイルに名前をつけて保存します。 .....	87
2-6) 計算開始 .....	87
2-7) Error 確認 .....	87
2-8) 計算結果の plot 表示 .....	88
13.2 高精度入力 Format を使ったシミュレーション .....	91
13.3 無限長線路のシミュレーション .....	96
1) 特性インピーダンスと等価なインピーダンスを線路 2 として接続する .....	96
2) 特性インピーダンスの代わりに特性インピーダンスの絶対値と同じ値の抵抗を接続する .....	98

3) サージインピーダンスと同じ値の抵抗を接続する .....	98
13.4 雷サージシミュレーションの基礎.....	99
13.4.1 直列分布定数回路のシミュレーション.....	99
1) 検討回路.....	99
2) インパルス波形 .....	99
3) 計算条件の設定 .....	102
4) 終端に接続したサージインピーダンス.....	102
5) 計算結果.....	102
13.4.2 並列分布定数回路のシミュレーション .....	103
14 参考文献.....	104
Appendix 1 複素電圧について.....	105
Appendix 2 複素数の除算.....	107

序

電気回路は導体を伝搬する波長と導体長の関係から集中定数回路として扱って構わない場合と分布定数回路として扱わなければならない場合とに分かれます。

集中定数回路の考え方で電圧、電流を取り扱う場合は、或る瞬時の或る岐路の導体上の電圧、電流は例えば  $f = \sin(\omega \cdot t - \theta)$  のように時間だけの関数であって距離には無関係であり、或る瞬時の或る岐路の導体上の電圧、電流値はどこでも同じと見なして取り扱います。つまり導体の長さ(距離)による影響は無いとして扱います。

一方、電圧、電流の波長が線路長と概略近い場合、例えば或る瞬時に線路長にちょうど 1 サイクルの正弦波電圧の波長が分布する電圧波のケースを考えて戴くと、この導体上の電圧は距離によって大きさが 0 から土のピーク値まで取ることになります。

このように線路長と波長が近い時は、電圧、電流波は時間と距離の両方の関数になります。(どのくらい波長と線路長が近い時に分布定数回路としてあつかうかと言う区分は個々の回路の設計で許容される誤差レベルによって異なります)

このように電圧、電流を時間と距離の両方の関数としてとらえる必要のある回路が分布定数回路です。

回路理論は集中定数の考え方であり、距離の影響は無視しています。

厳密には距離によって電圧、電流が異なって来ますが、回路理論で扱う導体長は波長に比して極めて短い状態のため距離による電圧、電流の差が極めて僅かで距離による影響は無視できるレベルなので時間だけの関数として取り扱っています。

例えば約光速で伝搬する商用周波数の線路を取り上げて波長を計算すると 5000km(60Hz の場合)、6000 km(50Hz の場合)もの長い波長になります(この波長は本稿の(9.1)式,(9.3)式から求められます)。このように回路理論で考察するケースでは導体長に比して波長が長いので距離による影響は無視されています。

分布定数回路では導体の微小区間に R(抵抗),L(インダクタンス),G(コンダクタンス),C(キャパシタンス)の線路定数が一様に分布している(分布定数回路と呼ばれる所以です)ところから、1)回路上の電圧(又は電流)、2)線路定数、3)時間、4)距離 間の関係式は電信方程式(偏微分方程式)で表現できます。

この電信方程式から電圧や電流を解析的に解くには先ずこの偏微分方程式の一般解を求めます。しかしこの偏微分方程式の一般解には未だ任意定数が含まれるので回路の境界条件(与えられた初期条件や回路条件)を入れて任意定数を確定し、電圧や電流の式を確定します。

しかし残念ながらこのようにして解析的に解けるケースは特殊な簡単なケースに限られ、しかもこのように解析的に解ける場合でも一般解が偏微分方程式となるため、多くの数学上の技巧を駆使して解く必要があり大変です。

このようなわけで現実の複雑な分布定数回路の任意の点の電圧、電流を求めるためには解析による方法ではなく ATP(EMTP)などのコンピュータを使ったシミュレーションに寄らざるを得ません。

本稿では最初に分布定数回路の基礎的な内容を解説し、数式による波形プロットを紹介した後、ATP(EMTP)を用いた基礎的な分布定数回路のシミュレーションについて紹介しています。

本稿では分布定数回路の基礎となる式の導出を納得して戴けるように導出の過程を紹介しています。このため意に反してかなりの数式が入って来てしまっています。このため式の変形をトレースするのが大変と思われる箇所もあると思います。しかしながら大事なのは最後に導出される

式とその意味なので、式の変形のトレースが大変と思われる時は、思い切ってその部分は大雑把に流れを追うぐらいに留めて戴くことでも良いと思います。大事なことは最終的に得られる結果の式とその式の意味を十分知ることです。こういうことを言うとお叱りを受けそうですが、でも式の変形にひっかかり途中で学習を止めてしまうより、このようにした方がはるかにましと思う次第です。余裕が出たら戻ってトレースすれば済む話だと思います。

現在ではいろいろなソフトを利用してパソコン上で数式をグラフ化できる時代になっているので、最終的に得られた数式については式に数値を代入し、グラフ化していろいろなケースを検討して見るのが面白く、また理解を深める上で大事だと思います。

さて第 13 項を見て戴ければおわかりのように ATP(EMTP)を使えばこれらの複雑な数式とは無縁に、線路定数、電圧、距離などの入力データを入力さえすれば後は計算実行させるだけで任意の位置の電圧、電流などの様子を直ちにシミュレーションすることができます。

ATP(EMTP)の結果は数値と共にカーブで可視化して見るすることができます。このように ATP(EMTP)は極めて便利なものです。しかも ATP は ATP Licensing Terms に同意し、署名した団体、個人は、royalty-free で使用できます。未だ使用していないお方はぜひ一度下記ホームページを見て導入をご検討ください。

<http://gundam.eei.eng.osaka-u.ac.jp/jaug/index.htm>

現実に分布定数回路中の電圧、電流を求めるには ATP(EMTP)などのシミュレーションでやるのにどうしてこんな面倒な数式を取り扱わなければならないのかと思われるかも知れません。

もっともな疑問ですが、最終的に得られる式の中に分布定数回路の基礎的な諸々の大切な内容が含まれています。これらを知れば分布定数回路についての理解やシミュレーション結果の予測、評価に役立つはずと考えるため、最初に分布定数回路の基礎を解説するものです。

以下に分布定数回路の基礎的な内容を紹介して行きますが、本稿では単相分布定数回路について述べます。この理由は単相分布定数回路の理論が大変ありがたいことに複雑な多導体系理論にも役立つためです。

その後に別稿となりますが本稿の第二部の中で多導体の分布定数回路についても紹介したいと思っていますが、いつになるか未定です。

最後に

本稿の内容については十分検討したつもりですが、本稿の内容に起因する不具合については大変申し訳ありませんが責任は負いかねます。あしからずご了承いただきたいと思います。

本稿は ATP(EMTP)ユーザのために分布定数回路とはと言う観点から分布定数回路の基礎と思われる点を解説したものです。ご自由にご利用ください。

## I. 単相分布定数回路

この単相分布定数回路を検討することで分布定数回路の多くの有益な基礎知識が得られます。また多導体系分布定数回路の基礎が得られます。

### 1. 電信方程式(基礎微分方程式)について

図 1-1 は単位長(1 m) 当たりの線路定数が  $R(\Omega/m)$ ,  $L(H/m)$ ,  $C(F/m)$ ,  $G(S/m)$ である回路の微小距離  $\Delta x(m)$  の線路定数、電圧、電流を示しています。

(これらの線路定数を基に以下各種の式が導かれますが、線路定数は 1m あたりの単位長の値であることにご注意ください。)

ここで  $\Delta x \rightarrow$ 無限小の場合、次図は分布定数回路になります。

電流の正の向きは任意に決められますがここでは図 1-1 の如く定めています。これは今後導きだす(5.7)(5.8)式の波動方程式の符号を+にするためです。(このように決めたととしても実際の電流が図示と逆向きであれば-の値として算出されるだけで、電流の向きは予め任意に決めることができるので問題はありません)

P 点の電圧は  $v$  (V), Q 点の電圧は  $v + \Delta v$  (V)です。

微小距離  $\Delta x$  の線路定数は図 1-1 に示すとおり、 $R \cdot \Delta x, L \cdot \Delta x, C \cdot \Delta x, G \cdot \Delta x$  となります。

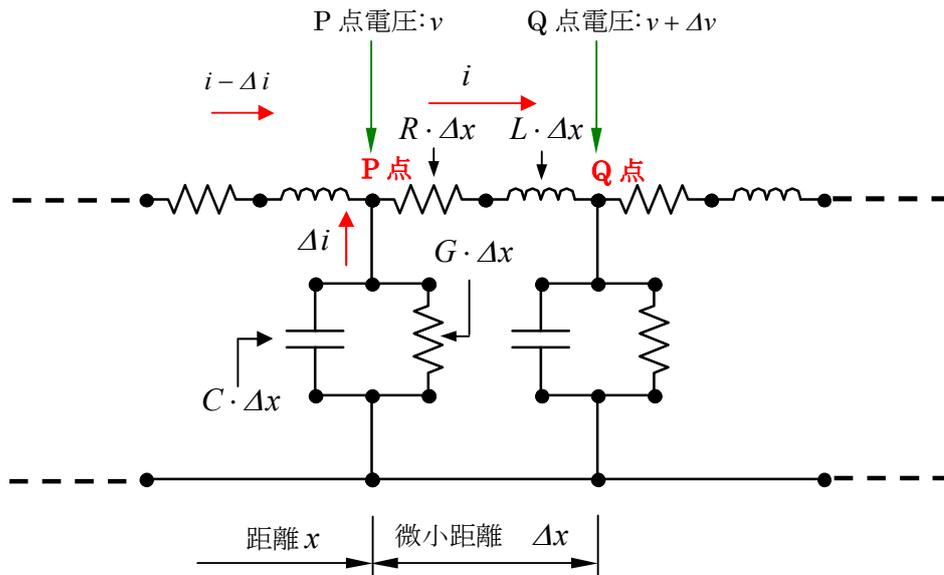


図 1-1 分布定数回路

P 点にキルヒホフの電流則を適用すると、

$$(i - \Delta i) - i = -\Delta i = (G \cdot \Delta x) \cdot v + (C \cdot \Delta x) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.1)$$

が成立します。また P-Q 間のブランチに対しキルヒホフの電圧則から次式が成立します。

$$v - (v + \Delta v) = -\Delta v = R \cdot \Delta x \cdot i + L \cdot \Delta x \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.2)$$

(1.1),(1.2)式の両辺を  $\Delta x$  で除して次式が得られます。

$$-\frac{\Delta i}{\Delta x} = G \cdot v + C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$-\frac{\Delta v}{\Delta x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.4)$$

$\Delta x \rightarrow 0$  の極限において図 1-1 の集中定数回路は分布定数回路になり、(1.3), (1.4)式は次のようになります。

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot v + C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.6)$$

(1.5),(1.6)式が**電信方程式**又は**基礎微分方程式**と呼ばれる分布定数回路の基本となる偏微分方程式です。この式から出発して以下に各種の式を誘導して行きます。

実際の問題を解くためにはこの電信方程式から出発し、更に下記に述べる 1),2)の作業して行く必要があります。ゴールは未だかなり先になります。

- 1) 先ずこの電信方程式の一般解を求めます。

この偏微分方程式である電信方程式の一般解を求める作業は一筋縄で行かず、様々な数学上の技巧を駆使して解かれています。

しかしながら単相分布定数回路に正弦波交流が印加される場合の一般解は比較的簡単に求まり、後述の(2.22)(2.25)式になります。

単相無損失分布定数回路の一般解(ダランベールの解)の式は(5.10)~(5.13)式になります。

- 2) 求めた一般解には任意定数が含まれるため、このままでは具体的に電圧、電流を求めることはできません。任意定数を決定するために更にその問題の境界条件(解の任意性を縛る諸々の条件、具体的な境界条件は後述の各種例題で説明しています)を一般解に入れて得られるその問題固有の電圧や電流の式を解いて電圧や電流を求めることになります。

## 2. 正弦波交流が印加される分布定数回路の一般解

最初のケースとして単相分布定数回路に定常状態になっている正弦波交流が印加される場合を仮定して電信方程式の一般解がどうなるか検討してみましょう。

この問題を最初に取り上げる理由はこの問題であれば比較的簡単に電信方程式の一般解が得られ、その一般解から分布定数回路の貴重な基礎的な内容をいろいろと知ることができるからです。尚、本項では分布定数回路には損失がある、つまり  $R, G$  が存在する分布定数回路として一般解を求めて行きます。無損失の場合は一般解に  $R = 0, G = 0$  の条件を入れれば無損失分布定数回路の式を導き出すことができます。

回路の  $v, i$  を次式のように指数関数形式の複素交流で表現します。

$$v = \dot{V} = V_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t), \quad i = \dot{I} = I_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \quad (2.1)$$

この指数関数で表現するというのがミソです。

なぜなら指数関数は時間で微分ができるので、(1.5)(1.6)式の右辺は時間で微分でき、結果として(1.5)(1.6)式の偏微分方程式は距離に関する常微分方程式にすることができるからです。

(2.1)式を複素交流と言うのは (2.1)式は(2.2)式のように実数部と虚数部から成り立つ複素量の交流として表せるからです。

$$\begin{aligned} V_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) &= V_m \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)) \\ I_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) &= I_m \cdot (\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

巻末に Appendix1 として複素電圧についての解説をしてありますので必要によりご参照ください。

この複素交流を電信方程式に適用して一般解を求め、一般解の虚数部をとれば正弦波に対する解が得られます。

では(2.1)式を(1.5), (1.6)式の右辺に代入して時間  $t$  による微分を実行しましょう。電圧については次のようになります。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} = R \cdot \dot{I} + L \frac{\partial \dot{I}}{\partial t} = R \cdot \dot{I} + L \cdot j\omega \cdot I_m \cdot \exp(j\omega t) \\ &= R \cdot \dot{I} + j\omega \cdot L \cdot \dot{I} = (R + j\omega \cdot L) \dot{I} \quad (2.3) \end{aligned}$$

(2.3)式はもはや時間の微分項が無くなり、左辺に距離に関する微分項だけが残るので、(2.3)式は距離に関する常微分方程式になります。つまり  $\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{dv}{dx}$  となります。

したがってこの(2.3)式は次のように表せます。

$$-\frac{d\dot{V}}{dx} = R \cdot \dot{I} + j\omega \cdot L \cdot \dot{I} = (R + j\omega \cdot L) \dot{I} \quad (2.4)$$

電流の偏微分に関しても同様に次のようになります。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i}{\partial x} &= G \cdot v + C \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = G \cdot \dot{V} + C \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} = G \cdot \dot{V} + C \cdot j\omega \cdot V_m \cdot \exp(j\omega t) \\ &= G \cdot \dot{V} + j\omega \cdot C \cdot \dot{V} = (G + j\omega \cdot C) \dot{V} \Rightarrow -\frac{d\dot{I}}{dx} = (G + j\omega \cdot C) \dot{V} \quad (2.5) \end{aligned}$$

ここで、 $R + j\omega \cdot L = \dot{Z}$  は分布定数回路の 1m 長あたりの直列インピーダンスであり、 $G + j\omega \cdot C = \dot{Y}$  は分布定数回路の 1m 長あたりの並列アドミッタンスですね。(2.4),(2.5)式を  $\dot{Z}$  と  $\dot{Y}$  で表すと

$$-\frac{d\dot{V}}{dx} = \dot{Z} \cdot \dot{I} \quad (2.6)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{Y} \cdot \dot{V} \quad (2.7)$$

となります。

分布定数回路の電圧、電流の一般解を求めるためにはまだまだ式の変形が続きます、もう一頑張りしましょう。

次に(2.6),(2.7)式を更に距離  $x$  で微分して次式を得ます(これも解くための技法の一つです)。

$$-\frac{d^2\dot{V}}{dx^2} = \dot{Z} \cdot \frac{d\dot{I}}{dx} \quad (2.8)$$

$$-\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \dot{Y} \cdot \frac{d\dot{V}}{dx} \quad (2.9)$$

(2.8),(2.9)式の右辺に出て来た微分項に(2.6),(2.7)式を代入して次式が得られます。

$$\frac{d^2\dot{V}}{dx^2} = \dot{Z} \cdot \dot{Y} \cdot \dot{V} \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{d^2 x} = \dot{Y} \cdot \dot{Z} \cdot \dot{I} \quad (2.11)$$

ここで次のように定義をします。

$$\dot{Z} \cdot \dot{Y} = \left( \sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}} \right)^2 = \dot{\Gamma}_v^2 \quad (2.12)$$

$$\dot{Y} \cdot \dot{Z} = \left( \sqrt{\dot{Y} \cdot \dot{Z}} \right)^2 = \dot{\Gamma}_i^2 \quad (2.13)$$

これらの  $\dot{\Gamma}_v$  と  $\dot{\Gamma}_i$  は電圧、電流に関する**伝搬定数(Propagation constant)**と呼ばれるものです。すると一般解がこの伝搬定数を使って簡潔に表すことができます。

ところでこの伝搬定数は進行波の伝搬の様子を示す極めて大事な定数であって、伝搬定数は進行波が分布定数回路を伝搬する時の減衰の度合いと位相遅れの度合い(これは伝搬速度に関係します)を表すものになります。伝搬定数の詳細は第6項で解説しています。

一般には  $\dot{Z}, \dot{Y}$  が行列の時、 $\sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}} \neq \sqrt{\dot{Y} \cdot \dot{Z}}$  なので、一般的には  $\dot{\Gamma}_v \neq \dot{\Gamma}_i$  ですが、**単相回路では**

$$\dot{\Gamma}_v = \dot{\Gamma}_i = \dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{Z}\dot{Y}} \quad (m^{-1}) \quad (2.14)$$

となります。

このように線路の単位長の直列インピーダンス  $\dot{Z}$  と並列アドミッタンス  $\dot{Y}$  を乗じたものの平方根が伝搬定数になります。

伝搬定数  $\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{Z}\dot{Y}}$  を  $\dot{Z}$  と  $\dot{Y}$  の数値を入れて計算すれば複素数になり、次式のように減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  から成り立ちます。

$$\dot{\Gamma} = \alpha + j\beta \quad (2.15)$$

減衰定数  $\alpha$  は分布定数回路を電圧や電流が伝わる時の伝搬距離に対する大きさの減衰の度合いを表し、位相定数  $\beta$  は伝搬距離に対する位相の遅れの度合いを示すもので、これらの減衰定数、位相定数は進行波の伝搬の様子を表すものとなるので  $\dot{\Gamma}$  を伝搬定数と呼んでいます。この  $\dot{\Gamma}$  を使って(2.10),(2.11)式の変形を続けて行きます。

(2.10),(2.11)式に(2.14)式の関係代入すると、次のようになります。

$$\frac{d^2 \dot{V}}{d^2 x} = \dot{\Gamma}^2 \cdot \dot{V} \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{d^2 x} = \dot{\Gamma}^2 \cdot \dot{I} \quad (2.17)$$

次にこのようにして得られた(2.16),(2.17)式を解いて電信方程式の一般解を求める作業に入ります。

最初に(2.16)の電圧  $\dot{V}$  の一般解を求めてみましょう。電流の一般解は電圧の一般解の結果を応用して求めることができます。

距離  $x$  における電圧の一般解の形は

$$\dot{V} = \dot{K} \cdot \exp(\dot{m} \cdot x) \quad (2.18)$$

であると仮定しましょう。(どうして?と思われることでしょう。種を明かせばこのように仮定す

るのは結果として一般解がこのような指数関数で表現できるためです。結果から逆算しているのにすぎません) ここで  $K$  は任意定数です。

(2.18)を(2.16)式に代入して(2.19)式が得られます。

$$\frac{d^2 \dot{V}}{dx^2} = \frac{d^2(\dot{K} \cdot \exp(\dot{m} \cdot x))}{dx^2} = \dot{m}^2 \cdot \dot{K} \cdot \exp(\dot{m} \cdot x) = \dot{\Gamma}^2 \cdot \dot{K} \cdot \exp(\dot{m} \cdot x) \quad (2.19)$$

(2.19)式の右端の式と右端から二つ目の式を比べれば、

$$\dot{m}^2 = \dot{\Gamma}^2 \quad (2.20) \quad \text{と言う関係になるのがわかります。}$$

(2.20)式から

$$\dot{m} = \pm \dot{\Gamma} \quad \text{または} \quad \dot{m}_1 = -\dot{\Gamma}, \quad \dot{m}_2 = +\dot{\Gamma} \quad (2.21)$$

このように  $\dot{m}$  は二つの値を取るなので、距離  $x$  における電圧  $\dot{V}$  の一般解は(2.18)式へ任意定数  $K$  の代わりに二つの任意定数  $A, B$  を用いて次のように表せます。

$$\dot{V} = \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (2.22)$$

この式が単相回路で且つ電源が正弦波交流の場合の分布定数回路の電圧に関する一般解です。

これがやっと求められた電圧の一般解の式です。具体的に電圧の値を求めるためには更に(2.22)式中の任意定数  $A, B$  を特定する必要がありますね。

任意定数  $A, B$  は与えられた分布定数回路の境界条件から決定することができます。境界条件の具体例と、境界条件からこれら  $A, B$  の任意定数値を決定する一例を次の3項で解説していますので後で学習しましょう。

さて次は電流の一般解です。電流の一般解は(2.6)式を変形し、更に(2.22)式の  $\dot{V}$  を  $x$  で微分して次式が得られます。

$$\begin{aligned} i &= -\dot{Z}^{-1} \cdot \frac{d\dot{V}}{dx} = -\dot{Z}^{-1} \cdot \frac{d(\dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x))}{dx} = \dot{Z}^{-1} \cdot \dot{\Gamma} (\dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x)) \\ &= \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{Z}} (\dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\text{ここで、} \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{Z}} = \frac{\sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}}{\dot{Z}} = \sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}} = Y_0 \quad (2.24) \quad \text{と定義します。}$$

(2.24)式の  $\sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}}$  は特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$  と呼ばれるものです。この特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$  は特性インピーダンスと呼ばれる  $Z_0$  の逆数ですが、これらの詳細は第4項で説明しています。

さて、この特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$  を使って(2.23)式を表すと次のように表せます。

$$i = \dot{Y}_0 \{ \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x) \} \quad (2.25)$$

この式が距離  $x$  における分布定数回路の電流に関する一般解です。

(2.25)と(2.22)式を比較すると、(2.25)式は(2.22)式の電圧の一般解に線路の特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$

を乗じた形になっています。つまり電圧にアドミッタンスを乗じて電流が求まるという良く知られている形になっています。

また(2.25)式の{ }内の演算が電圧の一般解では+ですが、電流の一般解の式では-になっています。この点の解釈は次のとおりです。

電圧の場合、前進波と後進波の和は進行方向と極性との間の関係は無関係で単にこれらの進行波の代数和を取れば良いのですが、電流の場合は前進波と後進波では電流の向きが逆になり、後進波は前進波の+方向と定めた向きと逆向きになるので-符号をつける必要があるからです。これらの電圧と電流の重畳方法は第12項の「進行波の反射、透過現象について」でも使われています。

ところで電圧と電流の一般解である(2.22)(2.25)式は式から距離の関数にはなっていますが時間の関数になっていないように見えますが、そうでしょうか？

答えは(2.22)(2.25)式の左辺は電圧、電流のベクトルであり、これらは時間と共に変化する量となっているので(2.22)(2.25)式はやはり距離と時間の関数になっています。

距離と時間の関数になることは次項に示す例題の(3.9)(3.10)式からも明らかでしょう。

このようにして分布定数回路に定常状態の正弦波が印加される場合の一般解が求まりましたが任意定数 A,B の内容が未だ確定していないので未だこれらの式から直ちに電圧と電流を求めることはできません。次項で境界条件から任意定数 A,B を確定する方法と内容の確定した任意定数を使った電圧と電流の式から電圧、電流を求めてみましょう。

### 3. 正弦波交流が印加される分布定数回路への一般解の応用

単相分布定数回路に正弦波交流電源が印加される場合の一般解が求まったので、この一般解を利用して早速、例題を検討してみましょう。3.3項ではこの検討の結果である電圧式に定数を入力して計算結果を図示しています。これにより分布定数回路のイメージをかなりつかめると思います。

検討は図3-1に示す損失を含む半無限長の単相分布定数回路で検討します。帰路は完全導体と見なしています。

半無限長線路とは無限長線路の半分の線路という意味で、図3-1の例では無限長線路の電源から左側半分が無く、電源から右方向には無限遠に伸びる線路になっている回路を意味します。(このような線路を取り上げる理由はA点から右側に進行する波だけを考えれば良く、また右側に伸びる線路長は無限大ですからこの線路終端からの反射の影響も考慮する必要が無いので現象を単純化して考察できるという大きな利点があるためです。)

今、距離  $x=0$  の始端に電圧  $\dot{E}_0 (V)$ 、角速度  $\omega (rad/sec.)$  の正弦波交流の定電圧源が接続されているものとします(定電圧源とは電流が流れても内部インピーダンスが0で電圧降下が発生しない電圧源ですね)。

この分布定数回路の伝搬定数は  $\Gamma = \alpha + j\beta$  とします。

この条件時のこの分布線路上の任意の距離  $x$  における電圧、電流を  $v(x), i(x)$  として、これらの電圧、電流がどのような式で表されるか求めてみます。最終的に得られる式は(3.9)と(3.10)式です。

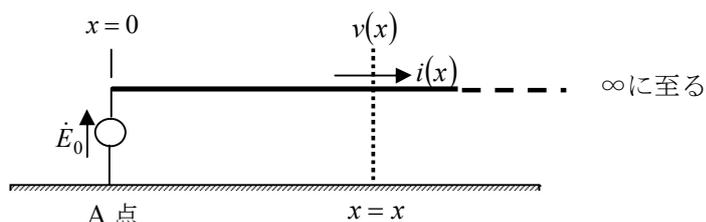


図3-1 半無限長線路

### 3.1 半無限長分布定数回路の境界条件の考察

(2.22)式の一般解の中に存在する任意定数  $A, B$  を確定するため、境界条件を考察することが必要です。早速考察してみましょう。

$x = 0$  (m) で電圧は伝搬定数による減衰も位相遅れも無く  $\dot{E}_0$  (V) のままです。

一方無限遠の距離では電圧は損失の在る回路で減衰定数  $\alpha$  が 0 で無いので減衰し、無限遠では減衰してしまい、0 (V) になります。

この二つが境界条件になります。

無限遠の距離で電圧は 0(V) になるという境界条件を(2.22)式の電圧の一般解に代入します。

(2.22)式は

$$\dot{V} = \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x) \quad \text{でした。}$$

(2.22)式の  $\dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)$  の項は  $x \rightarrow \infty$  の時、 $\dot{V} \rightarrow 0$  になるので

距離  $x = \infty$  で  $\dot{V} = 0$  となるためには、 $\dot{B} = 0$  で無ければなりませんね。このように境界条件から任意定数  $\dot{B}$  を確定できました。(2.22)式はしたがって、

$$\dot{V} = \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (3.1) \quad \text{となります。ここで更に、}$$

$x = 0$  で、 $\dot{V} = \dot{E}_0$  の境界条件を(3.1)式に代入すると、

$$\dot{E}_0 = \dot{A} \quad (3.2) \quad \text{が得られます。}$$

### 3.2 境界条件から導かれる電圧と電流の式

したがって任意の距離  $x$  における電圧  $\dot{V}$  の式は最終的に次式のように表されます。

$$\dot{V} = \dot{E}_0 \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (3.3)$$

任意の距離  $x$  における電流  $\dot{I}$  は、(2.25)式に(3.3)式を代入し、

$$\dot{I} = \dot{Y}_0 \cdot (\dot{E}_0 \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)) = \dot{I}_0 \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (3.4)$$

が得られます。 $\dot{Y}_0 \cdot \dot{E}_0$  は  $x = 0$  の電流値  $\dot{I}_0$  です。

この(3.4)式は電流  $\dot{I}$  の位相についても語っています。なぜなら電圧ベクトル  $\dot{V}$  に特性アドミタンスのベクトル  $\dot{Y}_0$  を乗じたものが電流  $\dot{I}$  ですから電流の位相は  $\dot{Y}_0$  が実数部だけの時、つまり抵抗、コンダクタンスのみから成り立つ時は電圧と同相ですが、虚数部が存在すれば、つまりインダクタンス分またはキャパシタンス分が存在すれば電流の位相は電圧の位相と異なって来ると示しています。

さて、(3.3), (3.4)式で表される電圧、電流の大きさがどのようなものになるか早く知りたいところですが、波形をプロットするまでもう少し式の変形が必要なので続けましょう。数式でアプローチする方法だとこのようになかなか大変です。後で紹介する ATP によるシミュレーションではこういう労力は必要としません。

伝搬定数  $\dot{\Gamma}$  は(2.15)式で紹介したように  $\dot{\Gamma} = \alpha + j\beta$  の複素量ですからこれを(3.3)式に代入して

$$\dot{V} = \dot{E}_0 \cdot \exp(-(\alpha + j \cdot \beta) \cdot x) \quad (3.5)$$

(3.5)式を展開すれば次式になります。

$$\dot{V} = \dot{E}_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(-j \cdot \beta \cdot x) \quad (3.6)$$

始端電圧  $\dot{E}_0$  は正弦波交流ですから、最大値を  $E_m$  として次式のごとく複素電圧で表現できます。(複素電圧については Appendix 1 に少し解説しています。必要により御参照ください)

$$\dot{E}_0 = E_m \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)) = E_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \quad (3.7)$$

(3.7)式の一番右側の式を(3.6)式の $\dot{E}_0$ に代入し、指数部が虚数部となっている項を纏めて

$$\begin{aligned} \dot{V} &= E_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(-j \cdot \beta \cdot x) \\ &= E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \beta \cdot x)) \end{aligned} \quad (3.8) \quad \text{を得ます。}$$

この(3.8)式の複素数電圧 $\dot{V}$ の $\exp(j(\omega \cdot t - \beta \cdot x))$ の部分は(3.7)式からわかるように余弦波と正弦波の和ですから実数部を取ってプロットしてもまたは虚数部を取ってプロットしても表すことができます(位相は $\pi/2$ ずれますが)。

今この $\dot{V}$ の虚数部を取ってプロットしてみます。(3.9)式の第二項の $Im(\quad)$ の部分は()内の式の虚数部を取ることを意味しています。

虚数部を取った結果は(3.9)式のようになります。

$$v = Im(E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \beta \cdot x))) = E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x) \quad (3.9)$$

この(3.9)式が加える電圧が定常状態の正弦波電圧とした時の、電信方程式から一般解を求め、更に一般解に半無限長分布定数回路の境界条件を入れてやると得られる、半無限長分布定数回路の任意の距離 $x$ における電圧の式になります。

(3.9)式は $v = f(x, t)$ の形になっていて分布定数回路の特徴である、電圧は距離と時間の関数になるということが良くわかります。

尚、電流についても上記と全く同じ考えで(3.5)～(3.9)式に対応する電流の式を求めることができ、次のように最終的に電流の式が得られます。

$$i = Im(\dot{Y}_0 \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \beta \cdot x))) = \dot{Y}_0 \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x) \quad (3.10)$$

### 3.3 半無限長分布定数回路上の数式による電圧波形例

やっと得られた(3.9)式の電圧式から分布定数回路に正弦波電圧を印加した時の電圧波形をプロットしてみましょう。

プロットする上で定数は一例として次の値であるとします。

始端電圧 $E_m$	1,000	V Peak
電圧源の周波数	50 Hz	
伝搬定数の内の減衰定数 $\alpha$	0.4299E-6	(Np / m)
伝搬定数の内の位相定数 $\beta$	0.1048E-5	(rad / m)

(3.9)式に上記の条件を代入し、電源からの距離が $x = 0(\text{m}), 0.2\text{E}6(\text{m}), 0.4\text{E}6(\text{m}), 0.6\text{E}6(\text{m}), 0.8\text{E}6(\text{m}), 1\text{E}6(\text{m})$ の各地点で電圧を観察することにしましょう。各地点で電圧波形を観察する時間は0 sec.から0.04 sec.とします。計算結果の各地点の電圧波形を一緒にプロットすると図 3.3-1 のとおりになります。この図から次の諸点がわかります。

- 1) 距離  $x$  が増加するにつれ電圧の大きさは一定の割合で減衰して行き且つ、位相も一定の割合で遅れて行きます。これらの現象は分布定数回路の減衰定数と位相定数によるものです。位相が遅れることの補足説明：下図の各波形の同一位相の点に注目すればわかります。例えば 0 (V) レベルを切る位置は電源からの距離が長くなるにつれて遅れることが図 3.3-1 から明らかです。距離が長くなると位相がこのように遅れて行きます。
- 2) 位相遅れは波長が長く伸びるために発生するのでは無く、図 3.3-1 の如く、右方向に波形が進行することで発生しています。この点間違いやすいので注意が必要です。つまり位相定数が進行速度に関係しそうだということがわかります。実際にそのとおりで詳しくは第 7 項で解説しています。
- 3) 各観測地点の電圧波形は集中定数回路と同じく時間だけの関数になっています。(距離を固定しているからです)。尚 ATP(EMTP)のシミュレーションの結果得られる波形もこのように注目している或る点についての電圧になるので時間だけの関数になります(ATP(EMTP)によるシミュレーション波形は 13 項を御参照願います)。
- 4) 図 3.3-1 では観測地点の距離を図 3 の如く  $x = 0(\text{m}), 0.2\text{E}6(\text{m}), 0.4\text{E}6(\text{m}), 0.6\text{E}6(\text{m}), 0.8\text{E}6(\text{m}), 1\text{E}6(\text{m})$  と固定してその地点で観察していますから、その地点で時間の経過に伴って観測される波形は、例え観測時間を長く取っても観測されるのは図 3.3-1 のように正弦波の波形が連続して観測されるだけであって、図 3.3-2 のような波形は観察されません。注意したい点です。
- 5) 各地点で観測される電圧波形は図 3 のごとく  $x = 0$  の波形を平行移動した形で(大きさは指数関数で減衰しますが)、振動周波数は電源の周波数と同じです。

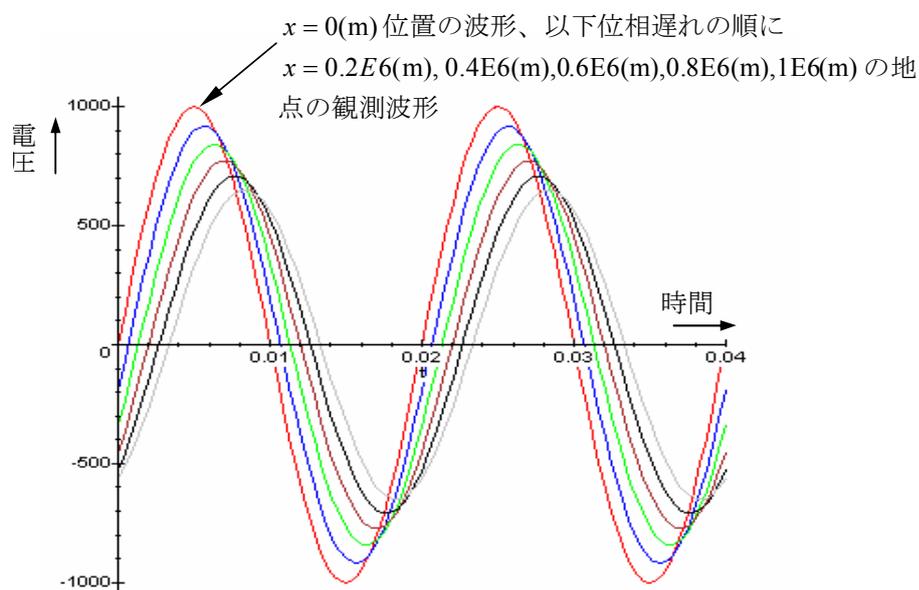


図 3.3-1 各地点で観測される電圧波形

次に(3.9)式で、観察する時間を  $t = 0.0, 0.002, 0.004, 0.006$  sec. 後の各瞬時の時に、電圧が距離に沿ってどのような分布になるか観察して見ましょう(上記では距離を固定しましたがここでは時間をこのように固定して考えます)。プロットする上での定数は上記と同一です。  
 また (3.9)式の  $\pm E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x)$  の項は包絡線になるため下図と一緒にプロットしています。  
 計算結果は図 3.3-2 のようになります。

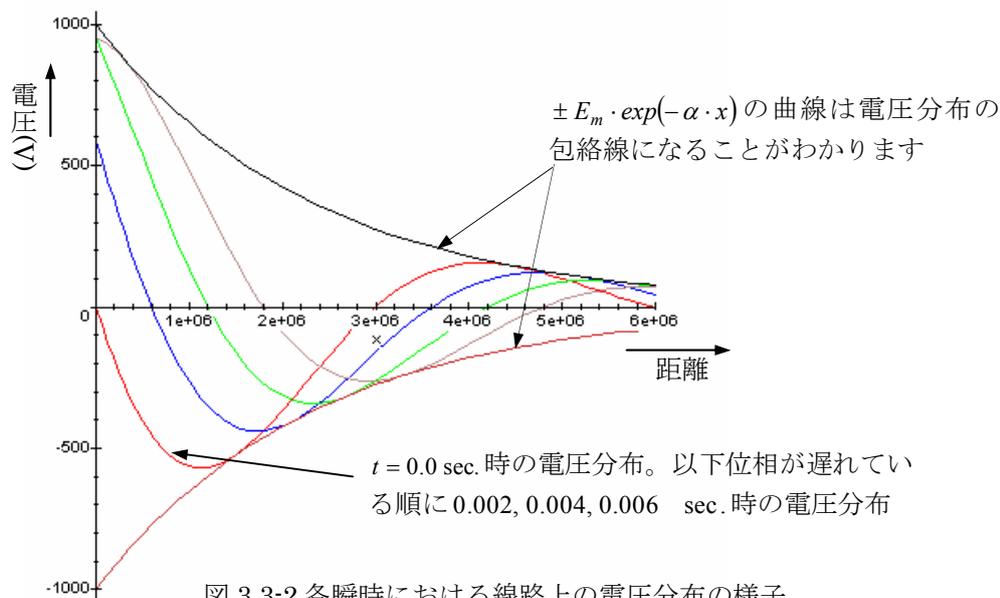


図 3.3-2 から次のことがわかります。

- 1) 電圧の大きさは上図の如く線路に沿っていろいろな大きさで分布します。距離が長くなるにつれて電圧波形の大きさは指数関数で減衰して行きます。これは(3.9)式中に  $E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x)$  が入って来ているためですね。 $\pm E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x)$  の波形を示すと図 3.3-2 に示すとおり分布電圧の包絡線になります。  
 集中定数回路ではインピーダンス部を除く導体上の電圧はどこでも同じであったのと比べるとこれは大きな相違点です。このように或る瞬時の分布定数回路上の電圧は線路に沿っていろいろな大きさで分布しており、一定値ではありません。電圧や電流は距離の関数にもなることが良くわかります。
- 2)  $t = 0 \rightarrow t = 0.006$  sec. になるに従い、同一位相の点例えば X 軸を切る点に着目すると波形は時間の経過と共に位相が遅れて行きます。これは波形が +x 方向に進行していると見ることができます。図 3.3-2 は 50 Hz の商用周波数の電圧例ですが、商用周波数の電圧でもこのように進行波として挙動することがわかります。この例のように線路長が長いときは分布定数回路としての取り扱いが必要になるわけです。  
 この位相遅れは位相定数  $\beta$  が存在するために発生しているものです。位相定数  $\beta$  は進行波の伝搬速度と関係がありそうだとすることがなんとなく感じられると思います。位相定数  $\beta$  と伝搬速度の詳細は第 7 項, 9 項でもう少し詳しく述べます。ここでは関係がありそうだとだけ頭に入れて戴ければと思います。

3) 電圧位相は(3.9)式の  $\sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x)$  の  $\beta \cdot x$  の項に支配され、距離が長くなるにつれ、位相が遅れて行く(波形が進んで行く)ことはこの式から明らかです。

4) 図 3.3-2 は電圧をプロットしていますが電流の波形も同様になります。このことは式(3.9)と(3.10)の式を比較すれば明らかです。

#### 4. 特性インピーダンス $Z_0$ 、サージインピーダンス、特性アドミッタンス $Y_0$

##### 4.1 特性インピーダンス $Z_0$

これらのインピーダンス、アドミッタンスがどのような式で表され、これらがどのようなものであるか検討しましょう。検討は反射の影響が無いので考察しやすい半無限長分布定数回路の左側の始点に正弦波交流が印加される場合で行います。

この検討条件であれば、電信方程式を時間で微分して(2.6)式が得られました。(2.6)式を再掲すると

$$-\frac{d\dot{V}}{dx} = \dot{Z} \cdot \dot{i} \quad \text{ですからこの式を変形して電流 } \dot{i} \text{ を求めると、}$$

$$\dot{i} = -\dot{Z}^{-1} \cdot \frac{d\dot{V}}{dx} \quad (4.1) \quad \text{となります。}$$

ここで  $\dot{V}$  は半無限長線路のため、電源が接続されている点から右に進む電圧波だけとなり、この電圧の或る瞬時に於ける距離  $x$  での電圧の大きさは(3.1)式で表されました。(3.1)式を再掲すると

$$\dot{V} = \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \quad \text{です。}$$

(4.1)式から電流  $\dot{i}$  を求めるため、(3.1)式の電圧を(4.1)式に入れて距離  $x$  で微分します。すると或る瞬時に於ける距離  $x$  での電流は次のように求められます。

$$\dot{i} = -\dot{Z}^{-1} \cdot \frac{d\dot{V}}{dx} = -\dot{Z}^{-1} \cdot \frac{d}{dx} \{ \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \} = \dot{Z}^{-1} \cdot \dot{\Gamma} \cdot \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (4.2)$$

ここで或る瞬時の距離  $x$  における分布定数回路の電圧と電流の比  $\frac{\dot{V}}{\dot{i}}$  を取ると次の(4.3)式となります。

$$\frac{\dot{V}}{\dot{i}} = \frac{\dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)}{\dot{Z}^{-1} \cdot \dot{\Gamma} \cdot \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)} = \frac{\dot{Z}}{\dot{\Gamma}} = \frac{\dot{Z}}{\sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}^2}{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} = \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}} \quad (4.3)$$

この(4.3)式は分布定数回路の或る瞬時の任意の点  $x$  の電圧と電流の比であるので、一種のインピーダンスになります。このインピーダンスを**特性インピーダンス**と言います。

つまり特性インピーダンスを  $\dot{Z}_0$  とすると、

$$\dot{Z}_0 = \frac{\dot{V}}{\dot{i}} = \frac{\dot{Z}}{\dot{\Gamma}} = \frac{\dot{Z}}{\sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}^2}{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} = \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}} \quad (\Omega) \quad (4.4) \quad \text{となります。}$$

(4.4)式は次の興味深いことを語っています。

$R, L, G, C$  の 4 種類の線路定数と電源の角速度が一定の分布定数回路の任意の距離  $x$  の電圧と電流の比はどこでも同じで値で特性インピーダンス  $\dot{Z}_0$  になります。または言い換えて任意の点の電流  $\dot{i}$  に特性インピーダンスを乗じたものがその点の電圧  $\dot{V}$  となるということになります。分布定数回路のどの点でも電圧と電流の比は(4.4)式で表される特性インピーダンスになるといふことになります。

特性インピーダンスは(4.4)式のように角速度の関数になるので、周波数によって特性インピーダンス値は変わることになります。取り扱う過渡現象の周波数によって特性インピーダンス値は変化するということになります。

この特性インピーダンスが通常のインピーダンスと違う点について述べておきます。一つは通常のインピーダンスは  $R \pm j \cdot X$  であり、(4.4)の特性インピーダンスとは定義式が異なります。

二つめは通常のインピーダンスは周波数の変化に応じて値が変わりますが特性インピーダンスは以下の 4.3 項で解説しているように周波数が低くなって直流になれば一定値の  $\sqrt{R/G}$  に収束し、無限大の高周波域では周波数に無関係の一定値の  $\sqrt{L/C}$  (サージインピーダンス)に収束します。

分布定数回路中のどの点を取っても電圧と電流の比は特性インピーダンスになると言う性質から特性インピーダンス  $Z_0$  の半無限長線路を途中の任意の点で切断して、そこに特性インピーダンスと同じインピーダンスを接地インピーダンスとして接続し、その終端を接地しても接続した接地インピーダンス中の電圧と電流の比は分布定数回路のそれと同じとなります。つまり分布定数回路から進行して来た進行波はそのまま接続したインピーダンス中に入ることになり二つの分布定数回路の接続点で反射は発生しないことを示しています。

このことはインピーダンス整合(インピーダンスマッチング)を取ることに同じです。このように特性インピーダンスの性質を利用してインピーダンス整合をすることができます。インピーダンス整合については第 13 項でも検討しています。

電源から接続点までの分布定数回路は半無限長線路と同じ挙動をします。切った箇所に接続したインピーダンスは無限遠の映像を作っていることから、このインピーダンスを映像インピーダンスとも言います。

#### 4.2 特性インピーダンスの単位

特性インピーダンスは  $Z_0 = \frac{V}{I}$  と定義されていますから、通常のインピーダンスと同じ( $\Omega$ )の単位になります。

次に周波数が低下し直流になった時の特性インピーダンスの収束値  $\sqrt{R/G}$  の単位と周波数が無限大になった時の特性インピーダンスの収束値  $\sqrt{L/C}$  (サージインピーダンス)の単位は共に  $\Omega$  になることを SI 基本単位から示してみましょう。

$R$  の単位( $\Omega$ )と  $G$  の単位( $S$ )を構成する SI 単位は次のとおりです。

$\Omega$  の単位は  $\text{Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$  であり、 $G$  の単位は  $\text{Kg}^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^3 \text{A}^2$  です。これらの単位を更に単位

m 当たりの単位に直して  $\sqrt{\frac{R}{G}}$  の単位を計算すると

$$\sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}}{\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2}} = \sqrt{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-6} \cdot \text{A}^{-4}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2} \quad (4.5)$$

となります。この得られた  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$  は  $\Omega$  の SI 単位による表示に他なりません。

同様にサージインピーダンス  $\sqrt{L/C}$  の単位を計算すると

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}}{\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2}} = \sqrt{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-6} \cdot \text{A}^{-4}} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2} \quad (4.6) \quad \text{となつてこれも}$$

$\Omega$  の SI 単位による表示に他なりません。

このように  $\sqrt{R/G}$  の単位もサージインピーダンス、の  $\sqrt{L/C}$  単位も  $\Omega$  となります。

$R, L, G, C$  の線路定数は単位長当たりの数値ですが、サージインピーダンス、特性インピーダンスはこのように単位長の  $\Omega$  値では無く、単なる  $\Omega$  値になる点にも留意したいと思います。

### 4.3 特性インピーダンスの周波数特性

次に特性インピーダンスの(4.4)式で周波数が増加して行く時の特性インピーダンスの周波数特性を見てみましょう。

(4.4)式の特性インピーダンスは複素数であるため、特性インピーダンスのインピーダンスの大きさは特性インピーダンスの絶対値を取ります。

特性インピーダンスの絶対値を  $Z_{abs}$  とすると(4.4)式は

$$Z_{0abs} = \sqrt{\frac{\sqrt{(R)^2 + (\omega \cdot L)^2}}{\sqrt{(G)^2 + (\omega \cdot C)^2}}} \quad (4.7) \quad \text{となり、この式から直ちに}$$

$f \rightarrow \infty$  の時、 $Z_{0abs} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  に収束することがわかります。この  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  はサージインピーダンスと呼ばれているものですね。つまり周波数が高くなるにつれて、特性インピーダンスはサージインピーダンスに漸近します。また逆に周波数が低下して行くにつれ、特性インピーダンスは(4.7)式から直ちに  $f \rightarrow 0$  の時  $Z_{0abs} = \sqrt{\frac{R}{G}}$  に漸近することがわかります。

一例として分布定数回路定数が次の通りである時のこの回路の周波数特性を(4.7)式から計算してみましょう。

$$\left. \begin{aligned} R &= 0.214\text{E}-3 \text{ (}\Omega/\text{m)} \\ L &= 0.166\text{E}-5 \text{ (F/m)} \\ G &= 0.1\text{E}-4 \text{ (S/m)} \\ C &= 0.67 \cdot \text{E}-11 \text{ (F/m)} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

周波数を 0(Hz)から  $1 \times 3\text{E}6$  (Hz)まで増加させて特性インピーダンス値を計算した結果を図 4.3-1 に示します。

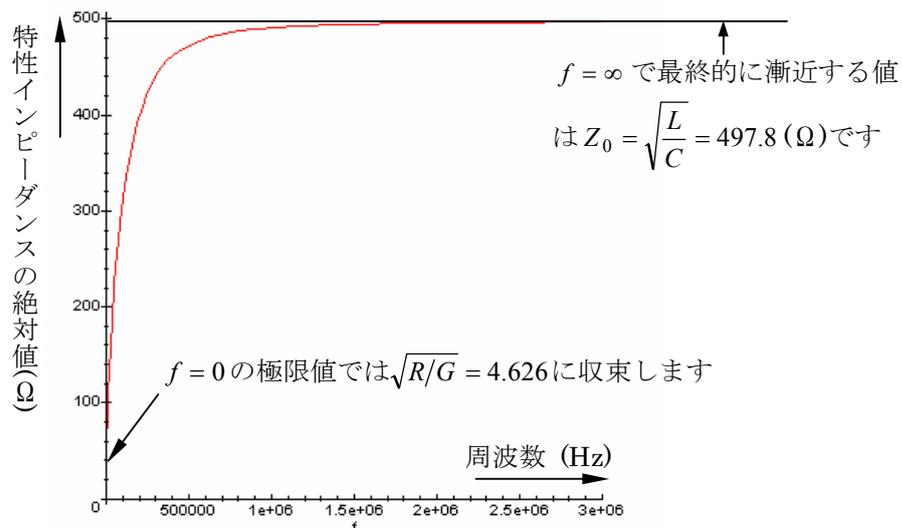


図 4.3-1 損失の在る半無限長分布定数回路の特性インピーダンスの周波数特性

この回路の周波数が  $\infty$  の時に漸近する時の特性インピーダンスの収束値であるサージインピー

ダンスは(4.7)式に(4.8)の定数を入れ 497.8(Ω)になります。また直流に漸近する時の特性インピーダンスの取束値は(4.7)式の $\omega$ を $\omega=0$ とおいて 4.626(Ω)になります。

#### 4.4 サージインピーダンス

上述のとおり損失が在る分布定数回路で $\omega \Rightarrow \infty$ の時の特性インピーダンス $Z_0$ の飽和値は $Z_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}}$ で、この $\sqrt{\frac{L}{C}}$ の形で表される特性インピーダンスをサージインピーダンスと称します。このようにサージインピーダンスは損失の在る分布定数回路で周波数が無限大に高くなった時の特性インピーダンスの極限值です。

線路定数には $R, L, G, C$ がありますがサージインピーダンス値が与えられれば、この回路の $\sqrt{\frac{L}{C}}$ の値が与えられたこととなります。

雷サージは高周波成分を多く含むところから特性インピーダンスの代わりにこのサージインピーダンスを使って雷サージ問題を検討することが行われています。

また、もし分布定数回路の線路長が短く無損失とみなせる場合であれば、 $R=G=0$ なので、この条件を(4.4)式に入れて無損失分布定数回路の特性インピーダンスを求めると

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot L}{j \cdot \omega \cdot C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.9)$$

となるので、 $R=G=0$ の時は周波数の極限值を取るまでも無く、周波数に無関係にサージインピーダンスとなります。

つまり $R=G=0$ と見なせる回路では、特性インピーダンスの $\dot{Z}_0 = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$ の関係から分布定数回路に電圧を印加し、その印加点に流入する電流を測定すればサージインピーダンスを知ることができます。

サージインピーダンスの値の一例として完全導体の帰路を持つ無損失単相分布定数回路(架空線)のサージインピーダンスを求めてみましょう。

この単相架空線の単位長長さのインダクタンスは次式になります。

次式は空気の透磁率は $\mu \cong \mu_0$ 、空気の誘電率は $\varepsilon \cong \varepsilon_0$ として算出されています。

$$L \cong \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ell n \frac{2 \cdot h}{r} \quad (\text{H/m}) \quad (4.10)$$

またこの架空線の単位長長さのキャパシタンスは

$$C \cong \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ell n(2 \cdot h/r)} \quad (\text{F/m}) \quad (4.11)$$

但し $h$ は架空線導体の高さ(m)、 $r$ は導体半径(m)、 $\mu_0$ は真空の透磁率 $4 \cdot E-7 \cdot \pi$  (H/m)、 $\varepsilon_0$ は真空の誘電率 $\varepsilon_0 = \frac{1 \cdot E7}{4 \cdot \pi \cdot c_0^2}$  (F/m)です。

このように無損失の単相架空線の単位長長さのインダクタンス値とキャパシタンス値が表わされることは多くの送電工学のテキストに解説されているのでそちらを参照して戴きたいと思えます。

よってサージインピーダンス $Z_0$ は、

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \cong \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ell n \frac{2 \cdot h}{r}\right) / \left(\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ell n(2 \cdot h/r)}\right)} = 60 \cdot \ell n \frac{2 \cdot h}{r} \quad (\Omega) \quad (4.12)$$

例えば $h=10$  m,  $r=0.005$  m の場合、 $Z_0 \cong 497.6$  (Ω)となります。

このようにサージインピーダンスは損失の在る分布定数回路で周波数が $\infty$ の時の特性インピーダンスでありまた分布定数回路で $L \neq 0, C \neq 0$ で且つ $R = G = 0$ となる場合の特性インピーダンスでもあります。

#### 4.5 特性アドミッタンス

特性インピーダンスの逆数を特性アドミッタンス $\dot{Y}_0$ と称します。特性アドミッタンス $\dot{Y}_0$ は次式で表されます。

$$\dot{Y}_0 = \frac{1}{\dot{Z}_0} = \frac{\dot{I}}{\dot{Z}} = \frac{\sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}}{\dot{Z}} = \sqrt{\frac{\dot{Z} \cdot \dot{Y}}{\dot{Z}^2}} = \sqrt{\frac{\dot{Y}}{\dot{Z}}} = \sqrt{\frac{G + j \cdot \omega \cdot C}{R + j \cdot \omega \cdot L}} \quad (\text{S}) \quad (4.13) \quad \text{です。}$$

### 5. 単相無損失分布定数回路の一般解(ダランベールの解)

#### 5.1 ダランベールの解について

さて損失が存在する単相分布定数回路に正弦波電圧が印加した場合の回路上の任意の点の電圧又は電流は第2項の如く、比較的わかりやすくそれらの一般解が求まりましたが、ここで取り上げる無損失の単相分布定数回路の場合は、無損失という単純化がなされているにもかかわらず、なんとこの一般解の導出は極めて難しいものになります。

この一般解はダランベールによって始めて解かれたため、ダランベールの解と呼ばれていいます。このため本稿では途中の波動方程式の導出までを紹介し、この波動方程式の一般解を求めるダランベールの解法については興味のある方は別途スタディ戴くこととし、ここでは数学的過ぎると思うので省略させて戴き、ダランベールの解の結果として得られる一般解のみを紹介します。

無損失線路のため $R = G = 0$ です。この条件を電信方程式(1.5),(1.6)式に代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial v}{\partial t} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.1) \quad \text{となります。これらの式を } x \text{ で再度微分}$$

して次式が得られます。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= C \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

(5.2)式の第一式の右辺に(5.1)式の第二式の関係を入れて、

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = C \frac{\partial}{\partial t} \left( -L \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -C \cdot L \frac{\partial^2 i}{\partial^2 t} \quad (5.3)$$

(5.3)式の両辺から一符号が取れ、変形して

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C \cdot L \frac{\partial^2 i}{\partial^2 t} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial^2 t} = \frac{1}{C \cdot L} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \quad (5.4) \quad \text{が得られます。}$$

また(5.2)式の第二式に(5.1)式の第一式を入れて、

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = L \frac{\partial}{\partial t} \left( -C \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -LC \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} \quad (5.5)$$

(5.5)式の両辺から一符号が取れ、変形して

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} = \frac{1}{L \cdot C} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.6) \quad \text{が得られます。}$$

(5.4)、(5.6)式の  $\frac{1}{C \cdot L} = \frac{1}{L \cdot C}$  を

$$\frac{1}{C \cdot L} = \frac{1}{L \cdot C} = c^2 \quad \text{または}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = c \quad (5.7) \quad \text{と定義します。}$$

この  $c$  の値はほぼ光速値になる場合もありますが、光速にならない場合もあります。ほぼ光速値になる場合は導体が空气中に設置されている場合だけです。(第 7.3, 第 7.4, 第 8.1 項を御参照ください)

この  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$  が光速 ( $3 \times 10^8$  (m/sec.)) となる場合は後述の 7.3 項で説明しています。

この  $c$  を用いて(5.4), (5.6)式を表すと無損失分布定数回路の電流と電圧の式は次のようになります。

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

この式は**波動方程式**と呼ばれている式です。

この二階偏微分方程式を解いて無損失分布定数回路の電流と電圧の一般解を求める必要があります。

回路を無損失回路とし、且つ単相であると単純化して得られるこの波動方程式ですが、この二階の偏微分方程式の一般解を解くのは難しく、この解が初めて与えられたのは 1750 年にダランベールによってでした。このためこの偏微分方程式の一般解はダランベールの解と呼ばれます。

ダランベールの解の導出過程では偏微分を繰り返して、更に偏微分した結果を積分して・・・というように様々な技巧を駆使して一般解を導出して行きますがここではその詳細は数学的過ぎると思うので省かせて戴き、結果の一般解のみを紹介致します。

この波動方程式を解いた一般解(ダランベールの解)は次のようになります。

距離の次元を持つ波動方程式の一般解は次のようになります。

$$v = f_1(x - c \cdot t) + f_2(x + c \cdot t) \quad (5.10)$$

$$i = Y_0 \{f_1(x - c \cdot t) - f_2(x + c \cdot t)\} \quad (5.11)$$

また時間の次元を持つ波動方程式の一般解は次のようになります。

$$v = F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (5.12)$$

$$i = Y_0 \cdot \left\{F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) - F_2\left(t + \frac{x}{c}\right)\right\} \quad (5.13)$$

(5.10)~(5.13)式の任意定数  $f_1, f_2, F_1, F_2$  は回路の境界条件で決定されるものです。

また、(5.10)~(5.13)式は波動解とも呼ばれます。

これらの波動解の一般解の内、電圧の一般解では{ }内は+ですが、電流の一般解では-になっています。この点の解釈は次のとおりです。

電圧の場合、前進波と後進波の和は進行方向と極性との間の関係は無関係で単にこれらの進行波の代数和を取れば良いのですが、電流の場合は前進波と後進波では電流の流れる向きが逆になり、後進波電流は前進波電流の+方向と定めた向きと逆向きになるので差を取る必要があるからです。

これらの電圧と電流の重畳方法は進行波の反射現象を考える時にも使われます。

これらの式の右辺の第一項目は前進波を表し、第二項目は後進波を表しています。

(5.10)式のように前進波、後進波からなる波の一例を 5.2 項で図示して見てみましょう。

## 5.2 ダランベールの解のプロット例

一例としてダランベールの解の形が次のようになる場合の電圧波形を次の数式からプロットしてみましょう。

$$f_1(x-c \cdot t) = \exp\{-0.5 \cdot (x-2 \cdot t)^2\} \quad (5.14)$$

$$f_2(x+c \cdot t) = \exp\{-0.5 \cdot (x+2 \cdot t)^2\} \quad (5.15)$$

したがって、電圧の式は

$$v = \exp\{-0.5 \cdot (x-2 \cdot t)^2\} + \exp\{-0.5 \cdot (x+2 \cdot t)^2\} \quad (5.16) \text{ です。}$$

(5.16)式をプロットしたのが図 5.2-1 で、プロット波形を見てもらうと明らかですが

$\exp\{-0.5 \cdot (x-2 \cdot t)^2\}$  の項は前進波で、 $\exp\{-0.5 \cdot (x+2 \cdot t)^2\}$  は後進波になります。

前進波、後進波についてそれぞれ  $t = 0 \text{ sec.}$  から  $t = 10 \text{ sec.}$  まで 2 sec. 間隔で計算した結果を図 5.2-1 に示します。赤の波形は  $t = 0 \text{ sec.}$  の波形を、青は  $t = 2 \text{ sec.}$  後、緑は  $t = 4 \text{ sec.}$  後、茶は  $t = 6 \text{ sec.}$  後、シアンは  $t = 8 \text{ sec.}$  後、黒は  $t = 10 \text{ sec.}$  後の波形を示します。

図 5.2-1 の左側の波は、時間の経過と共に右側に進み前進波となっています。図 5.2-1 の右側の波は時間の経過と共に波は左側に進む後進波となっています。

線路に開閉サージ又は雷撃によるサージが発生した場合はこのように発生地点から前進波と後進波が同時に左右に分かれて線路を伝搬して行きます。

この線路は無損失線路のため図 5.2-1 では前進波、後進波とも伝搬による大きさの減衰はありません。

図 5.2-1 の例では前進波と後進波の両方が存在していますが、例えば前出の例題の如く、半無限長で片端に電源がある場合は、後進波は 0 となり電源からは前進波のみしか供給されません。

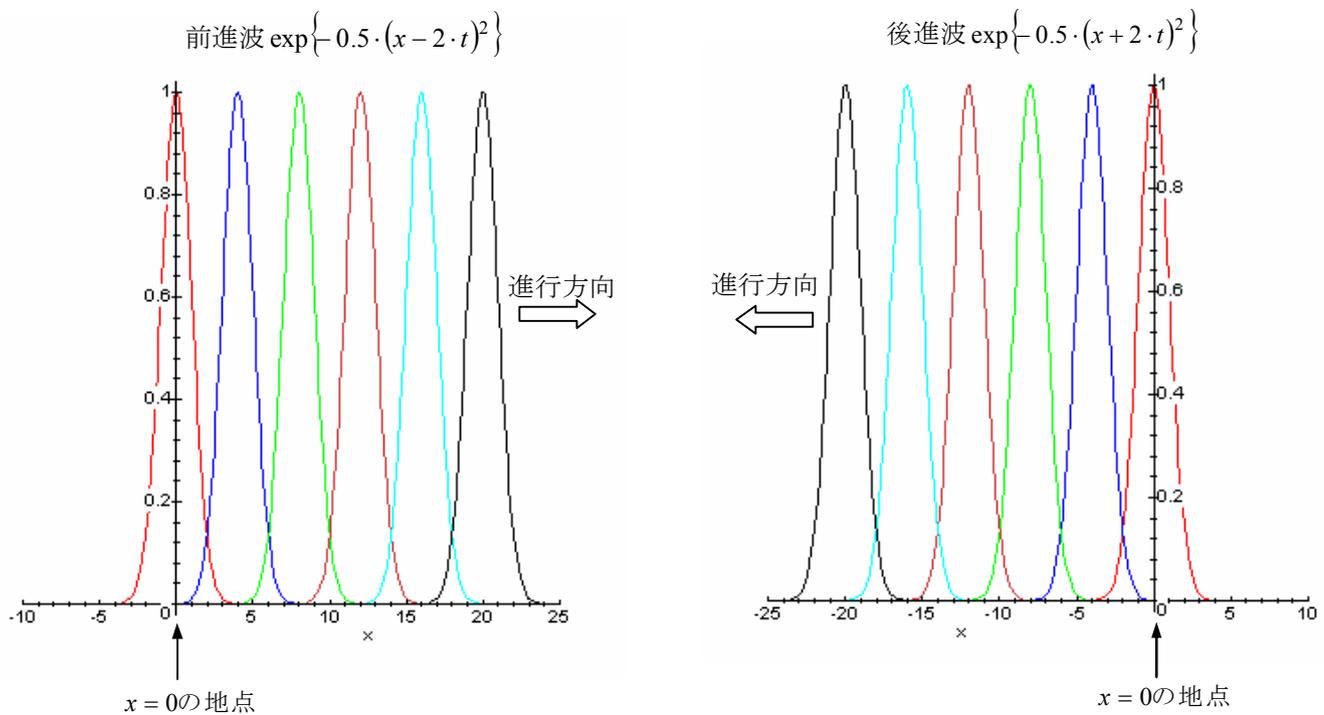


図 5.2-1 ダランベールの解の波形例

線路上で実際に観察される進行波は  $v = \exp\{-0.5 \cdot (x - 2 \cdot t)^2\} + \exp\{-0.5 \cdot (x + 2 \cdot t)^2\}$  の形で前進波と後進波の和となります。  $t = 0 \text{ sec.}$ ,  $t = 0.5 \text{ sec.}$ ,  $t = 1.0 \text{ sec.}$ ,  $t = 2 \text{ sec.}$  における実際に観察される波形を図 5.2-2 としてプロットしてみます。赤の波形が実際に観察される前進波と後進波の和の波形です。青は前進波、緑は後進波を示しています。

0 sec.の時は前進波、後進波が重なっているの波高値は二倍になっています。この理由で線路の途中で開閉サージや雷サージが発生した場合、発生地点の  $t = 0$  の電圧は線路の他の場所の電圧に比して大きくなります。このケースでは  $t = 2 \text{ sec.}$  以降は前進波と後進波は干渉することなく独立して進行して行きます。

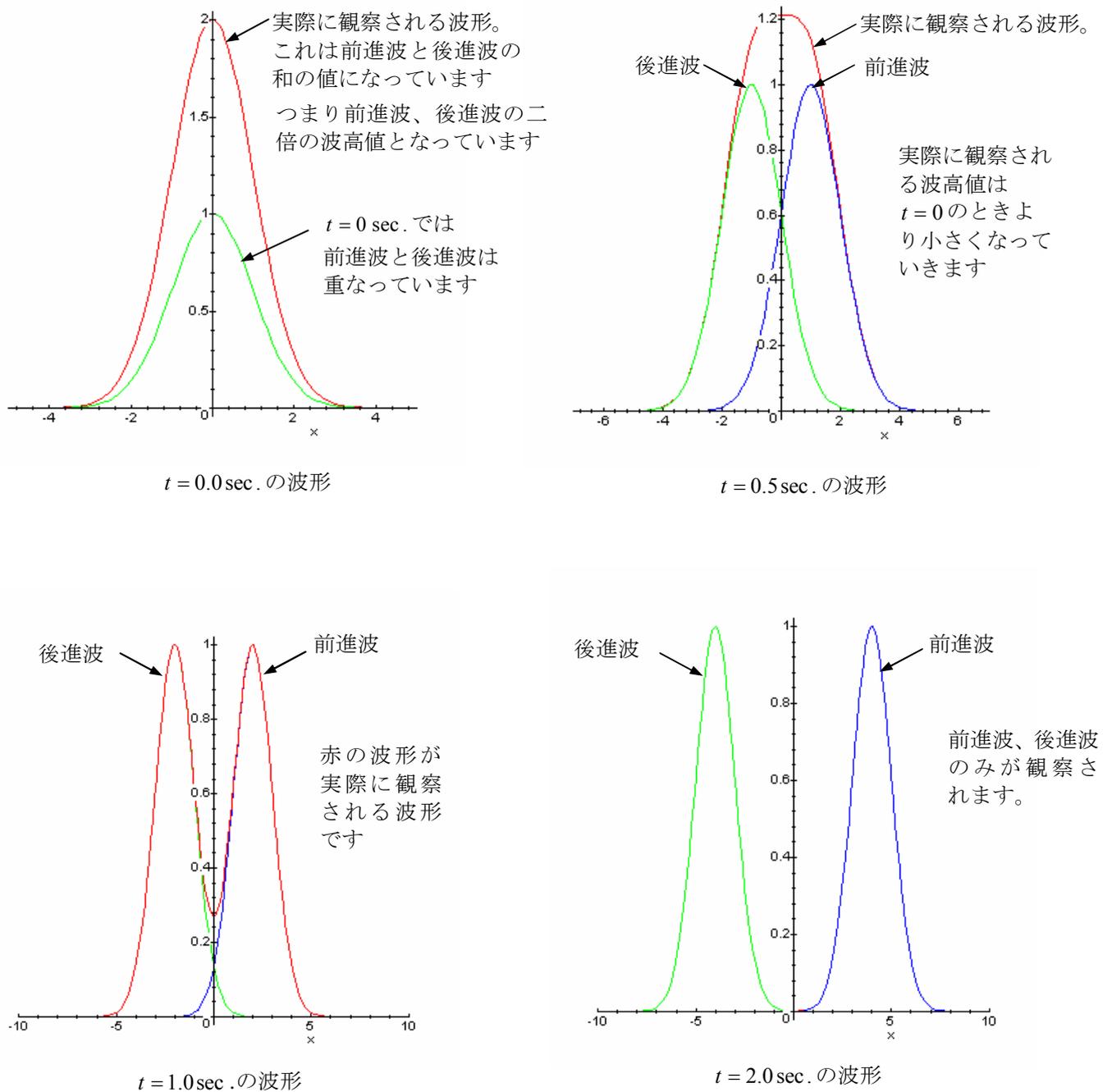


図 5.2-2 実際に観察される波形

このように時間の経過と共に同一位相の点が時間と共に遅れ又は進みすることで波形は進行していくのがわかります。

## 6. 進行波の伝搬の様子を決める伝搬定数

前項までに伝搬定数とは進行波の伝搬の様子を示すもので、伝搬定数は減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  から成り立ち、減衰定数  $\alpha$  は分布定数回路を電圧や電流が伝わる時の大きさの減衰の度合いを表し、位相定数  $\beta$  は伝搬する時の位相の遅れの度合いで、伝搬定数は進行波の伝搬の様子を表しているものであることを示しました。

また詳細は 7 項でも説明していますが位相定数  $\beta$  は線路に加えられた電圧又は電流の角周波数  $\omega$  とし、伝搬速度を  $c$  とすれば  $c = \frac{\omega}{\beta}$  の関係があるので、位相定数はその線路の伝搬速度  $c$  を決めるものにもなっています。このように伝搬定数は進行波の伝搬に大きく関わっているので本項で更にもう少し詳しく検討します。

### 6.1 損失の在る分布定数回路の伝搬定数

本項ではかなり数式が出て来てしまいます。これらの数式は伝搬定数を構成する減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  が線路定数と角速度でどのように表されるか求めるためのものです。最終的に得られる減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  の式は後述の(6.13)と(6.14)式です。

これらの減衰定数、位相定数の式の中に角速度  $\omega$  が含まれるため、周波数が高くなると減衰定数も位相定数も周波数の影響を受けて値が変わるので、減衰定数、位相定数とも周波数特性を持つこととなります。

特に減衰定数は周波数の影響を大きく影響を受けるようになります。

(6.13)と(6.14)式はこのように減衰定数と位相定数の周波数特性も表わしています。

これらの式を導いた後これらの式を使用し、位相定数、減衰定数の周波数特性を図示しています。これらの図を見れば、おそらくこれらの周波数特性が一目瞭然となると思います。

尚、(6.13)、(6.14)式を分布定数回路に「損失の在る場合の伝搬定数」というタイトルの中で紹介していますが、これらの式は式中の抵抗  $R$  及びコンダクタンス  $G$  を 0 とすれば、直ちに無損失の分布定数回路の減衰定数と位相定数を求めることができるので、損失の有無にかかわらず伝搬定数を算出できる式になっています。

では早速式の導出を始めましょう。

#### 1) 減衰定数

伝搬定数は既に(2.14)式で紹介したように線路の単位長当たりの直列インピーダンス  $\dot{Z}$  ( $\Omega/m$ ) と並列アドミッタンス  $\dot{Y}$  ( $S/m$ ) を乗じたものの平方根で、 $\dot{\Gamma}$  (ガンマ) で表します。つまり

$$\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}} = \alpha + j\beta \quad (6.1) \quad \text{と定義されます。}$$

この式に実際に  $\dot{Z} = R + j\omega \cdot L$ ,  $\dot{Y} = G + j\omega \cdot C$  の関係を入れて伝搬定数  $\dot{\Gamma}$  を計算すると以下の如く減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  の式を求めることができます。

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}^2 &= \dot{Z} \cdot \dot{Y} = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \beta - \beta^2 = (R + j \cdot \omega \cdot L)(G + j \cdot \omega \cdot C) \\ &= RG + j \cdot \omega \cdot (C \cdot R + L \cdot G) - \omega^2 \cdot L \cdot C \end{aligned} \quad (6.2)$$

この式で  $\alpha$ ,  $\beta$  と  $R, L, C, G$  に関する実数部、虚数部をそれぞれ纏めると次のようになります。

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \beta = R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C + j \cdot \omega \cdot (C \cdot R + L \cdot G) \quad (6.3)$$

(6.3)式の実数部に着目すると、実数部については

$$\alpha^2 - \beta^2 = R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C \quad (6.4) \quad \text{の関係式が成り立ち、}$$

(6.3)式の虚数部に着目すると、虚数部については

$$2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \beta = j \cdot \omega \cdot (C \cdot R + L \cdot G) \quad \text{となるので} \\ 2 \cdot \alpha \cdot \beta = \omega \cdot (C \cdot R + L \cdot G) \quad (6.5) \quad \text{の関係式が導かれ}$$

ます。

(6.4)(6.5)式の両辺を二乗して次式を得ます。

$$\alpha^4 - 2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 + \beta^4 = R^2 \cdot G^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot R \cdot C \cdot G + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2 \quad (6.6)$$

$$4 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 = \omega^2 \cdot (C^2 \cdot R^2 + 2L \cdot R \cdot C \cdot G + L^2 \cdot G^2) = \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2 + 2 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot R \cdot C \cdot G + \omega^2 \cdot L^2 \cdot G^2 \quad (6.7)$$

(6.6),(6.7)の辺々の和を取って次式を得ます。

$$\alpha^4 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 = R^2 \cdot G^2 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2 + \omega^2 \cdot L^2 \cdot G^2 + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2 \quad (6.8)$$

ここで、(6.8)式の右辺は

$$R^2 \cdot G^2 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2 + \omega^2 \cdot L^2 \cdot G^2 + \omega^4 \cdot L^2 \cdot C^2 = (R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2) \quad (6.9)$$

であるから(6.8)式は結局

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2) \quad (6.10)$$

$\alpha, \beta$  は正の実数なので(6.10)式の $(\alpha^2 + \beta^2)^2$ の平方根を取っても正の実数が得られます。

つまり

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} \quad (6.11) \quad \text{は正の実数として}$$

求められます。

さて(6.4),(6.11)式の両辺の和を取ると、

$$2 \cdot \alpha^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} + R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C \quad (6.12) \quad \text{となるので}$$

減衰定数は

$$\therefore \alpha = \sqrt{\left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} + (R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C) \right\} / 2} \quad (\text{Np/m})(6.13)$$

として分布定数回路に損失が在る場合の減衰定数が求まります。

減衰定数の単位については 6.3 1) に解説しています。

## 2) 位相定数

次に位相定数の式を求めます。

(6.11)式から(6.4)式を引けば、

$$2 \cdot \beta^2 = \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} - (R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C) \quad \text{となるので位相定数は}$$

$$\therefore \beta = \sqrt{\left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} - (R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C) \right\} / 2} \quad (\text{rad/m})(6.14)$$

として分布定数回路中に損失が在る場合の位相定数が求まります。

位相定数の単位については 6.3 2) に解説しています。

損失の存在する分布定数回路の $\alpha, \beta$ の式(6.13),(6.14)式に $\omega$ が含まれるので周波数特性を有します。

(6.13),(6.14)式からは未だどのような周波数特性になるか具体的に見えてきませんが 8.1 項と 8.2 項でこの位相定数と減衰定数の周波数特性を視覚化して図示しているので御参照ください。

## 6.2 無損失分布定数回路の伝搬定数

### 1) 減衰定数

分布定数回路がもし無損失分布定数回路であれば、(6.13)式に無損失分布定数回路の条件  $R = 0, G = 0$  を入れて  $\sqrt{\quad}$  内を計算すれば直ちに  $\alpha = 0$  が得られます。

つまり  $R, G$  が存在すれば減衰定数  $\alpha \neq 0$  で(6.13)式の式で表されるものになり、もしも  $R, G$  が存在しなければ減衰定数  $\alpha = 0$  なので波は伝搬して行っても少しも減衰しないという結果になります。

また  $\alpha = 0$  なので減衰定数の周波数特性もありません。

### 2) 位相定数

分布定数回路中に損失が無い場合の位相定数  $\beta$  は(6.14)式に  $R = 0, G = 0$  を入れて、

$$\beta = \omega \sqrt{L \cdot C} \quad (6.15) \quad \text{または(5.7)式から } \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = c \text{ なので}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \quad (6.16) \quad \text{とも表せます。}$$

(6.15)式の如く分布定数回路が無損失である場合の位相定数は角速度( $\infty$ 周波数)と分布定数回路の単位長の  $L$  と  $C$  の平方根の積に比例するという結果になります。

無損失分布定数回路の位相定数はこのように角速度に比例してどんどん大きくなるという周波数特性になります。この無損失の分布定数回路の位相定数の周波数特性と損失の存在する分布定数回路の位相定数の周波数特性の一例を第 8.1 項で図示しています。

## 6.3 伝搬定数の単位

(6.13)、(6.14)式で与えられた減衰定数、位相定数の単位について確認してみましょう。

### 1) 減衰定数の単位

(6.13)、(6.14)式中の  $R, \omega, L, G, C$  の各誘導単位は(6.17)式で示す SI 基本単位から成り立っています。尚、 $A$  は Ampere、 $s$  は時間の second の意味です。

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \text{Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}, \\ \omega &= \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ H &= \text{Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \\ \frac{1}{\Omega} &= S = \text{Kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \text{A}^2 \\ F &= \text{Kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2 \end{aligned} \right\} (6.17)$$

これらの SI 基本単位を減衰定数  $\alpha$  の(6.13)式中の各定数に適用して減衰定数  $\alpha$  の単位を計算すると次の(6.18)式になります。

$$\sqrt{\left( \frac{\text{Kg}^2 \cdot \text{m}^4}{\text{s}^6 \text{A}^4} + \frac{\text{rad}^2 \cdot \text{Kg}^2 \cdot \text{m}^4}{\text{s}^6 \text{A}^4} \right) \cdot \left( \frac{\text{s}^6 \text{A}^4}{\text{Kg}^2 \cdot \text{m}^4} + \frac{\text{rad}^2 \cdot \text{s}^6 \cdot \text{A}^4}{\text{Kg}^2 \cdot \text{m}^4} \right) + 1 - \text{rad}^2} = \sqrt{\sqrt{(1 + \text{rad}^2)^2} + 1 - \text{rad}^2} \quad (6.18)$$

つまり無次元の単位となります。

減衰定数  $\alpha$  は単位  $\text{m}$  あたりの減衰率の数値で表しますが、この式の各定数は単位  $\text{m}$  当たりのものでないので、改めて全ての電気定数の単位を  $\text{m}$  当たりの単位とすると、

$$\sqrt{\left(\frac{Kg^2 \cdot m^2 + rad^2 \cdot Kg^2 \cdot m^2}{s^6 A^4}\right) \cdot \left(\frac{s^6 A^4 + rad^2 \cdot s^6 \cdot A^4}{Kg^2 \cdot m^6}\right) + \frac{1 - rad^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{1 + rad^2}{m^2} + \frac{1 - rad^2}{m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{m} \quad (619)$$

となり、当然の結果ながら  $m^{-1}$  の単位になります。

ところで減衰定数  $\alpha$  の単位は(Np/m)となって、単位の分子に Np が入って来ていて今述べた結果の  $m^{-1}$  と異なっています。この違いの解釈はどのようにするのでしょうか？

その説明は次の通りです。

減衰定数  $\alpha$  は単位 m 当たりの減衰率を示すものなので単位の分母には m、分子には減衰率が来ます。

或る量の減衰率を表す方法はいろいろあり、絶対比率や、常用対数、dB や更に自然対数で表わす Np(ネーパ)があります。

Np は比率をあらわす一種の量で、距離 0 の電圧を  $V_0$ 、距離 x の電圧が  $V_x$  であったとすると

Np は次のように定義されます。Np は比較対象の量の比率を自然対数で表す単位で、Np という単位名称が付けられていますが、Np 自身は次式から明らかなように無次元量です。

$$Np = \ln \frac{V_x}{V_0} \quad (Np) \quad (6.20)$$

したがって Np を使った減衰率なら Np/m となります。

減衰定数の dB 表示なら dB 値 =  $20 \log_{10} \frac{V_x}{V_0}$  で計算した dB 値/m となります。

または次のように考えることもできます。

半無限長線路の(3.3),(3.5),(3.6)式から電源電圧を  $\dot{V}_0 = \dot{E}_0$  の時任意の距離 x の電圧は

$$\begin{aligned} V_x &= E_0 \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) = E_0 \cdot \exp\{-(\alpha + j \cdot \beta) \cdot x\} \\ &= E_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \exp(-j \cdot \beta \cdot x) \end{aligned}$$

でしたから、 $V_x$  と  $\dot{V}_0$  の減衰率は

$$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0} = \frac{E_0 \cdot \exp\{-(\alpha + j \cdot \beta) \cdot x\}}{\dot{E}_0} = \exp\{-(\alpha + j \cdot \beta) \cdot x\} = \exp(-\alpha \cdot x) \exp(j \cdot \beta \cdot x) \quad (6.21)$$

となります。この式の一番右側の式の内、 $\exp(-\alpha \cdot x)$  の項は  $\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0}$  の大きさを表すので

$$\left| \frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0} \right| = \exp(-\alpha \cdot x) \quad (6.22) \text{ という関係式が成り立ちます。}$$

この式の両辺の自然対数を取った後、左辺と右辺を入れ替えて

$$-\alpha \cdot x = \ln \left| \frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0} \right| \quad \text{が得られます。}$$

この式の両辺を  $-x$  で除して

$$\alpha = -\frac{1}{x} \cdot \ln \left| \frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0} \right| \quad (6.23)$$

この式の  $\ln \left| \frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0} \right|$  部は Np の定義式そのもので、それを更に距離で除して単位 m 当たりの Np を算出しているので  $\alpha$  の単位は(Np/m)となるのがわかります。

## 2) 位相定数の単位

(614)式の位相定数の各パラメータに単位  $m$  当たりにした SI 基本単位を入れて位相定数  $\beta$  の単位を計算すると

$$\sqrt{\left(\frac{Kg^2 \cdot m^2 + rad^2 \cdot Kg^2 \cdot m^2}{s^6 A^4}\right) \cdot \left(\frac{s^6 A^4 + rad^2 \cdot s^6 \cdot A^4}{Kg^2 \cdot m^6}\right) - \frac{1 - rad^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{1 + rad^2 - 1 + rad^2}{m^2}} \quad (6.24)$$

となるので位相定数の次元は(rad/m)となることがわかります。

この位相定数の単位から位相定数は単位  $m$  当たりの位相の遅れ(又は進み)角度(rad.)ということがわかり、このことを利用すれば第 7 項で述べるように位相定数と角速度から伝搬速度を算出できます。

## 7. 位相速度 (=伝搬速度)と伝搬速度の単位

### 7.1 位相速度 (=伝搬速度)とは

ここでは進行波の伝搬する速度である伝搬速度について考察してみましょう。

本項は無損失の架空線路の伝搬速度がほぼ光速になることも示していてなかなか興味深いところだと思います。

送配電線を伝搬する電磁波は TEM 波(Transverse Electro Magnetic 波、電界、磁界が進行方向と直角(Transverse)の平面内だけに存在し、進行方向には存在しない波)です。この TEM 波の位相速度はエネルギーを運ぶ速度と同じになるので、位相速度が送電線を伝搬する進行波の伝搬速度となります。

では位相速度の定義とはどのようなものでしょう。

位相速度とは波形の同一位相点間の距離とその距離を伝搬する時間で定義した進行波の進行速度です。図 7.1-1 で説明します。

同一位相点として例えば図のごとく、時間  $t_1$  の進行波が X 軸を切る P 点と、時間が経って  $t_2$  となった時の進行波が X 軸を切る Q 点をとります。そして P 点と Q 点の距離は図 7.1-1 の如く  $x_1, x_2$  とします。

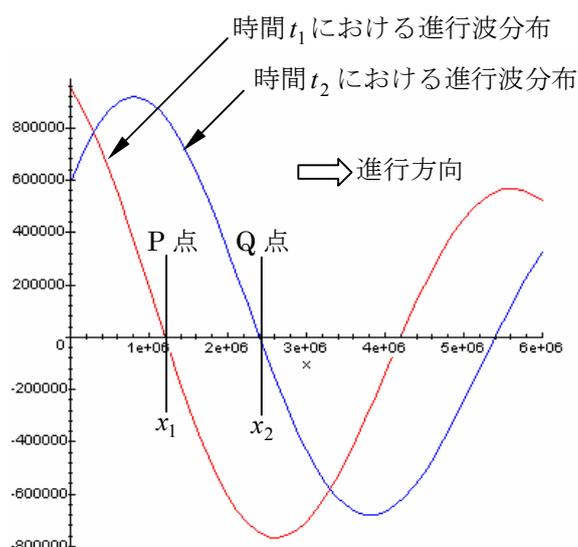


図 7.1-1 位相速度の定義を説明する図

下準備として、(3.9)式の  $\sin()$ 内を入れ替える変形をすると次式になります。

$$v = -E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x - \omega \cdot t) \quad (7.1)$$

この式を更に次のように変形します。

$$v = -E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \sin\beta(x - \omega \cdot t/\beta) \quad (7.2)$$

この(7.2)式を用いて位相速度の式を求めて行きます。

P、Q 点は同一位相点ですから、(7.2)式の角度に関する部分は等しくなりますね。

したがって、

$$\beta(x_1 - \omega \cdot t_1/\beta) = \beta(x_2 - \omega \cdot t_2/\beta) \quad (7.3) \text{ という関係が導かれ、更に両辺を}$$

$\beta$  で除して、

$$(x_1 - \omega \cdot t_1/\beta) = (x_2 - \omega \cdot t_2/\beta) \quad \text{が得られます。この式は更に次のよう}$$

に変形できます。

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.4)$$

この(7.4)式の左辺は速度の定義式そのものです。つまり  $\frac{\omega}{\beta}$  が位相速度でもあり、伝搬速度でも

あることとなります。

この位相速度(伝搬速度)を  $c$  とすると

$$c = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.5)$$

という伝搬速度に関する重要な関係式が得られます。この式は損失の存在する分布定数回路にも、無損失の分布定数回路にも適用できる関係式です。

この(7.5)式は次のことを意味しています。

「位相定数  $\beta$  は距離 1m の間に進む(又は遅れる)位相角度(rad)を表しています。この逆数の  $1/\beta$  は(m/rad)であり、角度が 1 rad 進む(又は遅れる)のに必要な進行距離(m)を表しています。

一方、この波の角速度は  $\omega$  (rad/sec)で 1 秒間に  $\omega$  (rad)進むので、1 秒間に進む(又は遅れる)距離

は  $\omega \cdot \frac{1}{\beta}$  となり、単位は  $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{rad}}\right) = \text{m/s}$  となり速度を表します。つまり

$$\text{位相速度(伝搬速度)} = \frac{\omega}{\beta} \text{ (m/sec)} \quad (7.6) \quad \text{となります。}」$$

$c \cdot \beta = \omega$  と変形した時の解釈は次のようになります。

「位相定数が  $\beta$  なので 1m あたり  $\beta$  (rad)位相が進み(又は遅れ)ます。一秒間に伝搬する距離  $c$  (m) では  $c \cdot \beta$  (rad)の位相が進む(又は遅れる)こととなります。これはこの波の一秒間に進む角度  $\omega$  (rad)に等しい。

つまり  $c \cdot \beta = \omega$  となります。」

伝搬速度については第 8 項でも波長と位相定数の関係から説明しています。8 項もご参照戴くとより一層理解が増すと思われま。

## 7.2 伝搬速度の単位

伝搬速度の単位は

$$\frac{\omega}{\beta} \Rightarrow \frac{\text{rad}}{s} \cdot \frac{1}{\frac{\text{rad}}{m}} = \frac{m}{s} \quad (7.7) \quad \text{となるので速度の単位になります。}$$

ここでの注目点は、(7.5)式で表されるように位相定数  $\beta$  が電源の  $\omega$  と共に伝搬速度を決める要素になっていると言う事です。

## 7.3 無損失線路の電圧、電流の伝搬速度

もし線路が無損失分布定数回路なら伝搬速度  $c$  がどのような式で与えられるか検討してみましょう。無損失回路であれば  $R=G=0$  ですから、線路直列インピーダンス  $\dot{Z}$  と線路並列アドミッタンスは次のようになります。

$$\dot{Z} = j \cdot \omega \cdot L, \quad \dot{Y} = j \cdot \omega \cdot C \quad (7.8)$$

この時の伝搬定数は

$$\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{Z} \cdot \dot{Y}} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (7.9) \quad \text{となります。}$$

伝搬定数は(7.10)式の如く実数部と虚数部に分けてあらわされます。

$$\dot{\Gamma} = \alpha + j \cdot \beta \quad (7.10)$$

(7.9),(7.10)式から虚数部に注目して次の位相定数の関係式が成り立ちます。

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (7.11)$$

このように無損失分布定数回路の位相定数  $\beta$  は  $L \cdot C$  の平方根に電源角速度  $\omega$  を乗じたものになります。

この位相定数  $\beta$  を(7.5)式に入れば無損失分布定数回路の伝搬速度  $c$  は

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{m/s}) \quad (7.12) \quad \text{となり、なんと角速度に無関係な伝搬}$$

速度  $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  になることがわかります。損失のある回路では伝搬速度は(7.5)式で示したように角速度の関数になります。

(7.12)式を使って単相無損失架空線路の場合の伝搬速度を検討すると次に示すように

$$c = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cong c_0 \text{ とほぼ光速、 } c_0 = 3 \cdot E8 \quad (\text{m/s}) \text{ になります。}$$

注)  $E8$  の表記は  $10^8$  を表します。 $E-7$  は  $10^{-7}$  を表します。以下同様です。

単相無損失架空線路の伝搬速度は次の通りです。

単相架空線の単位長さのインダクタンスとキャパシタンスは 4.4 項のサージインピーダンスのところでも既に紹介したように次の式になります。

インダクタンスは

$$L \cong \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot h}{r} \quad (\text{H/m})$$

またこの架空線のキャパシタンスは

$$C \cong \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2 \cdot h/r)} \quad (\text{F/m})$$

但し  $h$  は架空線導体の高さ(m)、 $r$  は導体半径(m)、 $\mu_0$  は真空の透磁率  $4 \cdot E-7 \cdot \pi$  (H/m)、 $\epsilon_0$  は真

空の誘電率  $\epsilon_0 = \frac{1 \cdot E7}{4 \cdot \pi \cdot c_0^2}$  (F/m)です。

さてこの時の伝搬速度を上記の L,C を使って求めてみると

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cong \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot h}{r}}_L \cdot \underbrace{\frac{2 \pi \epsilon_0}{\ln(2 \cdot h/r)}}_C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4 \cdot \pi \cdot E-7}_{\mu_0} \cdot \underbrace{\frac{1 \cdot E7}{4 \cdot \pi \cdot c_0^2}}_{\epsilon_0}}} \quad (7.13)$$

このように

$$c \cong \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \quad (\text{m/s}) \quad (7.14) \quad \text{となります。ここで } \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \text{ は光速値 } c_0 \text{ のので}$$

伝搬速度はほぼ光速になります。

注意:  $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  が常にほぼ光速になるわけではありません。この点にご留意願います。無損失の架空

線路の L と C と言う条件で光速に近い値になるということです。つまりこの線路導体を取り巻く媒質は空気であり、空気の透磁率、誘電率は真空の透磁率、真空の誘電率とほぼ等しいため伝搬速度は光速になりますが、L,C の値は導体周囲の媒質の透磁率、誘電率によって様々な値を取り、空気以外の媒質中にある導体の透磁率、誘電率は真空のそれに比して大きいため、空気以外の媒質中にある導体の伝搬速度は一般に無損失分布定数回路であっても  $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  は光速以下になります。

例えば、比誘電率が  $\epsilon_s$  の誘電体中に置かれた電線のキャパシタンス C の値は  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_s}}$  と

なります。これは空気中に置かれた場合の伝搬速度の  $1/\sqrt{\epsilon_s}$  になることとなります。ポリエチレン絶縁同軸ケーブルはポリエチレンの比誘電率が 2.3 なので  $c_1 \approx 0.66 \cdot c_0$  とポリエチレン絶縁しないで空気中に置いた時の伝搬速度より遅くなります。

#### 7.4 損失が在る分布定数回路の伝搬速度

この場合の位相定数  $\beta$  は周波数特性のため低周波領域では無損失分布定数回路の位相定数より大きくなるので低周波領域の伝搬速度は無損失の場合より遅くなりますが、高周波領域では損失が在る場合の位相定数  $\beta$  は無損失分布定数回路の位相定数  $\beta$  に漸近するので伝搬速度の差は無くなります。詳細は第 8 項で説明します。

#### 7.5 伝搬速度の単位

ところで、 $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  の単位が(m/s)になるって本当?と疑問を抱かれる方が多いと思います。

このことは本当ですが、この説明は次のようになります。

インダクタンス、キャパシタンスの誘導単位を SI 基本単位で表せば

$$L: \frac{\text{Henry}}{\text{m}} = \left( \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \text{A}^2} \right) \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \text{A}^2} \quad (7.15) \quad \text{です。また}$$

$$C: \frac{\text{Farad}}{\text{m}} = \left( \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{Kg} \cdot \text{m}^2} \right) \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{Kg} \cdot \text{m}^3} \quad (7.16) \quad \text{となるので伝搬速度 } c \text{ の単位は}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \text{A}^2} \cdot \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{Kg} \cdot \text{m}^3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}}} = \text{m/s} \quad (7.17) \quad \text{となります。}$$

## 8. 伝搬定数の周波数特性

伝搬定数の周波数特性について説明します。

伝搬定数を構成する位相定数、減衰定数のそれぞれについて調べてみましょう。

### 8.1 位相定数の周波数特性

#### 1) 無損失分布定数回路の位相定数の周波数特性

(7.11)式から  $\beta = \omega\sqrt{L \cdot C}$  であり、周波数に比例する結果であることは既述のとおりです。

#### 2) 損失が在る分布定数回路の位相定数の周波数特性

周波数特性を表す式は既述の(6.14)式で、

$$\beta = \sqrt{\left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} - (R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C) \right\} / 2} \quad \text{でした。}$$

この特性式を見ただけではなかなか周波数特性を明確に把握しにくいので、R,L,G,Cに下記の適当な定数を与えてこの周波数特性をプロットしてみると図 8.1-1 の特性になります。

つまり低周波領域では損失が在る分布定数回路の位相定数 > 無損失分布定数回路の位相定数となります。この結果、(7.5)式( $c = \omega/\beta$ )より損失が在る分布定数回路の伝搬速度は低周波領域では無損失分布定数回路の伝搬速度より遅くなるという結果が得られます。

与えた定数は

$$R = 1 \cdot E - 6 \text{ (}\Omega/\text{m)}$$

$$L = 2 \cdot E - 4 \text{ (H/m)} = 0.2 \text{ (mH/m)}$$

$$G = 1 \cdot E - 8 \text{ (S/m)}$$

$$C = 0.556 \cdot E - 13 \text{ (F/m)} = 0.0556 \text{ (pF/m)}$$

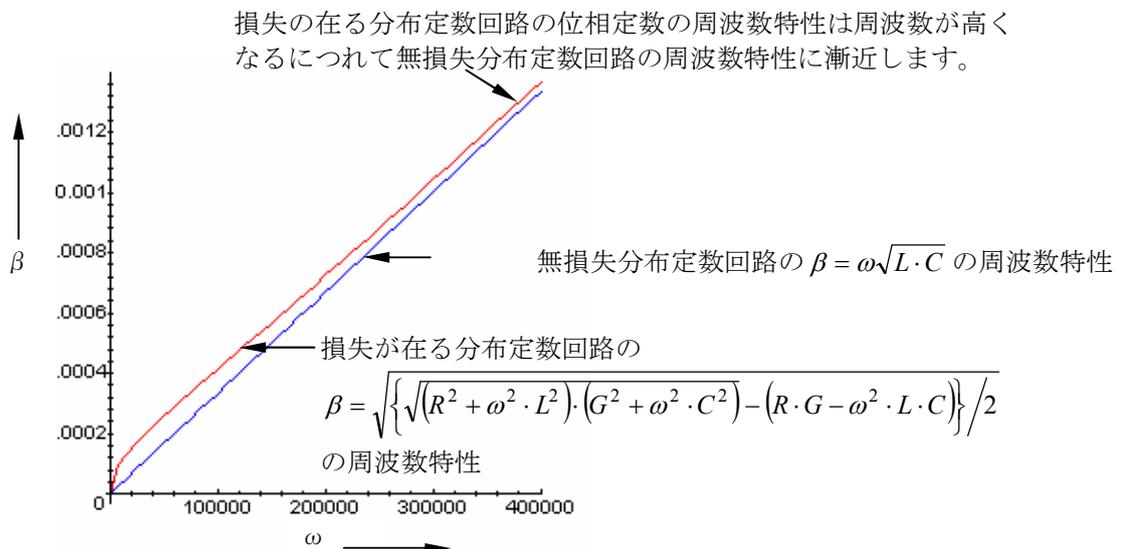


図 8.1-1 損失有り と 損失無し の分布定数回路の位相定数の周波数特性

更に高周波領域になった時の位相定数の周波数特性を図 8.1-2 に示します。

図 8.1-2 から高周波領域になると損失が在る分布定数回路の位相定数の周波数特性は無損失の位相定数の周波数特性に漸近するのがわかります。

したがって損失の在る線路のケースで周波数が増加した時の伝搬速度を考えれば伝搬速度は周波数の増加とともに上がり、やがて無損失分布定数回路の伝搬速度  $c = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  に漸近します。

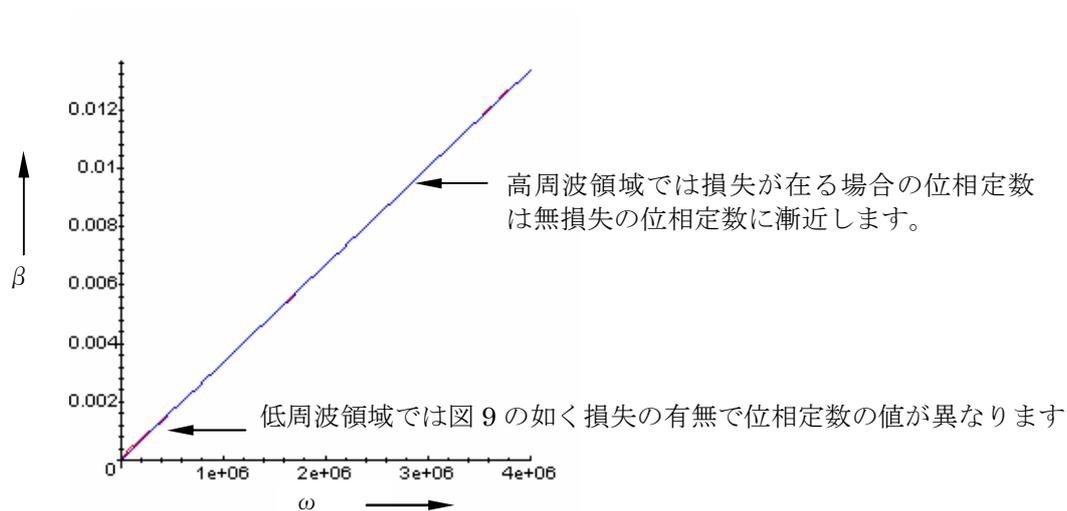


図 8.1-2 損失の在る分布定数回路の位相定数の周波数特性

## 8.2 減衰定数の周波数特性

### 1) 無損失分布定数回路の減衰定数 $\alpha$ の周波数特性

既に述べたように無損失分布定数回路の減衰定数  $\alpha$  は、(6.13)式に無損失分布定数回路の条件  $R=0, G=0$  を入れると減衰定数  $\alpha$  は 0 となるため、減衰定数の周波数特性を問題にする必要はありません。

### 2) 損失が在る分布定数回路の減衰定数 $\alpha$ の周波数特性

減衰定数の(6.13)式に  $\omega=0$  を代入すると(直流の場合ですね)、 $\alpha = \sqrt{R \cdot G}$  となります。

つまり周波数が 0 の時、減衰定数は一定値  $\alpha = \sqrt{R \cdot G}$  となります。

次に周波数の増加と共に減衰定数は図 8.2-1 のように増加してして行きますがやがて減衰定数  $\alpha$  は図 8.2-1 に示すように飽和します。

図 8.2-1 のプロットに用いた  $R, L, G, C$  の各定数は位相定数のプロットに用いた定数と同一です。

尚、この例の  $\omega=0$  の時の減衰定数を参考までに求めると  $\alpha = \sqrt{R \cdot G} = 0.1E-6$  (Np/m)

又  $\omega$  が  $\infty$  になった時の飽和値  $\alpha$  は図 11 中に示した  $\alpha = \frac{\sqrt{C/L} \cdot R + \sqrt{L/C} \cdot G}{2}$  より

約 0.000299(Np/m)となります。

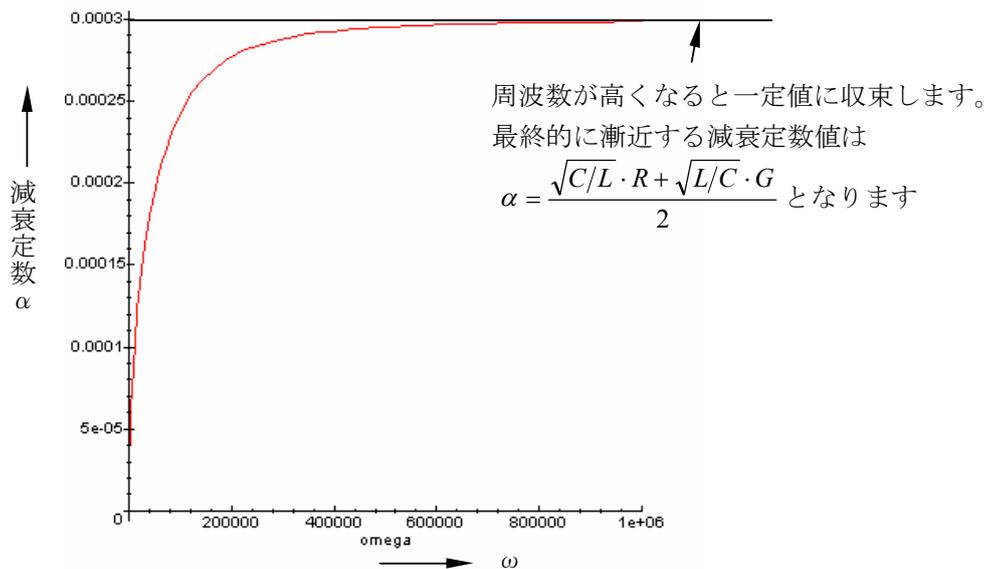


図 8.2-1 減衰定数  $\alpha$  の周波数特性

図 8.2-1 に示した減衰定数  $\alpha$  の高周波領域の最終的に飽和する値  $\alpha = \frac{\sqrt{C/L} \cdot R + \sqrt{L/C} \cdot G}{2}$  は (6.12)式から次のようにして求められます。

(6.13)式に  $\frac{R^2}{\omega^2 \cdot L^2} \ll 1$ ,  $\frac{G^2}{\omega^2 \cdot C^2} \ll 1$  の時成立する次の近似式を適用します。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} &= \omega \cdot L \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 \cdot L^2}} \cong \omega \cdot L \cdot \left(1 + \frac{R^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot L^2}\right) \\ \sqrt{G^2 + \omega^2 \cdot C^2} &= \omega \cdot C \cdot \sqrt{1 + \frac{G^2}{\omega^2 \cdot C^2}} \cong \omega \cdot C \cdot \left(1 + \frac{G^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot C^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

これらを(6.13)式に入れて式を整理して行くと次のようになります。

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2} + \frac{L \cdot G^2}{4 \cdot C} + \frac{C \cdot R^2}{4 \cdot L} + \frac{R^2 G^2}{8 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C} + \frac{RG}{2} - \frac{\omega^2 \cdot LC}{2}} \quad (8.2)$$

ここで  $\frac{\omega^2 \cdot L \cdot C}{2}$  の項は相殺されて無くなり、また  $\frac{R^2 G^2}{8 \cdot \omega^2 \cdot L \cdot C}$  の項は  $\omega \rightarrow \infty$  で 0 になるので  
結局  $\omega \rightarrow \infty$  の時の  $\alpha$  は次の(8.3)式となり、図 8.2-1 中に示した式となります。

$$\alpha = \sqrt{\frac{L \cdot G^2}{4 \cdot C} + \frac{C \cdot R^2}{4 \cdot L} + \frac{RG}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{C}{L} \cdot R^2 + 2 \cdot R \cdot G + \frac{L}{C} \cdot G^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot R + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot G}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot R + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot G}{2} \quad (8.3)$$

### 9. 波長 $\lambda$ と位相定数の関連について

波長を  $\lambda$  (m)、周波数を  $f$  (1 秒間当たりの振動数ですね、単位は  $s^{-1}$ )、伝搬速度を  $c$  (m/s) とすれば、 $\lambda \cdot f$  が伝搬速度  $c$  になりますからこのことからおなじみの

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{m}) \quad (9.1) \text{ という関係式が直ちに導かれます。}$$

注) (9.1) 式の伝搬速度  $c$  は光速  $c_0$  になるとは限りません。導体が置かれた媒質の誘電率、透磁率により決まる伝搬速度になります。

位相定数  $\beta$  と電源角速度  $\omega$  から波長を求めることができます。

この関係式を求める考え方は次の通りです。

位相定数の単位のところで述べたように位相定数の物理的イメージは 1m 当たりの位相の遅れ (又は進み) の角度 (rad.) です。このようにして進行波が遅れながら (又は進みながら) 進行して行き、ちょうど 1 サイクルになって波長分の距離を進行した時の角度は  $2 \cdot \pi$  (rad.) になります。

距離と位相角の対応は図 9-1 になります。

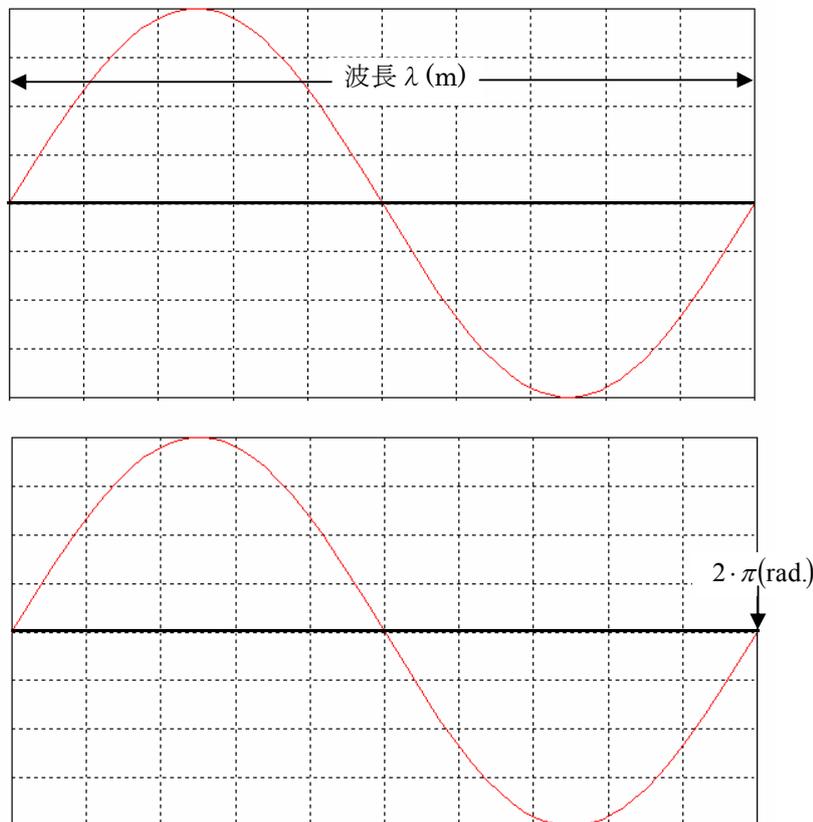


図 9-1 波長と位相角の関係

この図から 1m 当たりの位相の進み (又は遅れ) の位相角の対応を求めれば、

$$\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \text{ (rad/m) となります。これが位相定数 } \beta \text{ に他なりません。}$$

つまり、位相定数は 1 サイクル波形の距離と位相角の対応を表しているのですね。

よって、

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \quad (9.2) \quad \text{の関係が導かれます。これを变形して}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad (9.3) \quad \text{という位相定数を使っても波長を求めることができます。}$$

ところで進行波の位相は遅れ又は進むということは波長 $\lambda$ が変わるということでしょうか。この疑問については位相定数 $\beta$ の式を考えればわかります。

(9.3)式の分母の $\beta$ は損失が在る分布定数回路場合は(6.14)式で示した、

$$\beta = \sqrt{\left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 \cdot L^2) \cdot (G^2 + \omega^2 \cdot C^2)} - (R \cdot G - \omega^2 \cdot L \cdot C) \right\} / 2} \quad \text{でした。}$$

また無損失の分布定数回路場合の $\beta$ は(6.15)式で示した

$$\beta = \omega \sqrt{L \cdot C} \quad \text{でした。}$$

したがって $\beta$ は $\omega$ が一定である限り、線路定数で決まる一定の大きさの値になるので、(9.3)式から波長 $\lambda$ は途中で変化することはありません。

結局進行波の位相が進む、遅れるというのは波長は不変で、波全体が右側又は左側に進行するという捉え方になるのですね。このことは波の進行を考える時、横軸に距離を取る代わりに位相角を取って考察すればわかりやすいと考えます。

尚、伝搬速度は第7項で(7.1)式から導く方式を示しましたが、波長の式である(9.3)式を利用すると伝搬速度 $c$ の式を次のように簡単に導くことができます。

(9.3)式の両辺に周波数 $f$ を乗じれば

$$\lambda \cdot f = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} \quad (9.4) \quad \text{です。}$$

(9.4)式の左辺は $c$ 、右辺の分子は角速度 $\omega$ になりますから

$$c = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{となり、第(7.5)式と同じ結果が得られます。}$$

## 10. 双曲線関数表現の一般解への変換

正弦波交流が印加される有限長の分布定数回路の数式による解析のためには電信方程式から導出した任意の距離 $x$ における(2.22)、(2.25)式の指数関数表現の一般解を双曲線関数表現の一般解に変換しておくこと次の11項で解説するように終端短絡の有限長線路、終端開放の有限長線路及び任意のインピーダンスで終端が短絡されている有限長線路の解析に力を発揮するので変換しておきましょう。

(2.22)式は次のとおりでした。

$$\dot{V} = \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x)$$

(2.25)式は次のとおりです。

$$\dot{I} = \dot{Y}_0 \left\{ \dot{A} \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{B} \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x) \right\}$$

さて指数関数と双曲線関数の間には次の関係式があります。

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (10.1)$$

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad (10.2)$$

この関係式を使って指数関数表現の一般解を双曲線関数表現の一般解に変換しますが、この関係式を利用するために任意定数 $A, B$ を(10.3)(10.4)式で示す任意定数 $C, D$ に置換します。この置換をすることで(10.1)(10.2)式を双曲線関数に変換できるようになります。

$$\dot{A} = \frac{\dot{C} - \dot{D}}{2} \quad (10.3)$$

$$\dot{B} = \frac{\dot{C} + \dot{D}}{2} \quad (10.4)$$

(2.22)式中の A,B に(10.3),(10.4)の式を代入して展開します。

$$\dot{V} = \left( \frac{\dot{C} - \dot{D}}{2} \right) \cdot \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x) + \left( \frac{\dot{C} + \dot{D}}{2} \right) \cdot \exp(\dot{\Gamma} \cdot x) = \dot{C} \cdot \frac{\exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} - \dot{D} \cdot \frac{\exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} + \dot{C} \cdot \frac{\exp(\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} + \dot{D} \cdot \frac{\exp(\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} \quad (10.5)$$

この(10.5)式の右辺第1項と第3項グループ化し、また第2項と第4項をグループ化します。すると

$$\dot{V} = \dot{C} \cdot \left\{ \frac{\exp(\dot{\Gamma} \cdot x) + \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} \right\} + \dot{D} \cdot \left\{ \frac{\exp(\dot{\Gamma} \cdot x) - \exp(-\dot{\Gamma} \cdot x)}{2} \right\} \quad (10.6) \text{ が得られます。}$$

(10.6)式の右辺の第1項目の{ }内は(10.2)式から  $\cosh(\dot{\Gamma} \cdot x)$  になることがわかります。また右辺の第2項目の{ }内は(10.1)から  $\sinh(\dot{\Gamma} \cdot x)$  になることがわかります。

よって(10.6)式は次のように双曲線関数に変換された距離  $x$  における電圧の一般解になります。

$$\dot{V} = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (10.7)$$

(2.25)式の電流についても同様に A,B の代わりに(10.3),(10.4)の関係式を入れて展開し、整理して距離  $x$  における電流の一般解は

$$\dot{I} = -\dot{Y}_0 \cdot \left\{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \right\} \quad (10.8) \text{ となります。}$$

以上で指数関数形式の一般解を双曲線関数形式の一般解に変換できました。

任意定数の  $\dot{C}, \dot{D}$  は境界条件から求めることができます。

では早速これらの結果を使って有限長の分布定数回路の電圧、電流を検討してみましょう。

## 11. 有限長の分布定数回路

### 11.1 終端短絡の有限長分布定数回路

前項の応用として、図 11.1-1 に示す終端が接地されている有限長の分布定数回路の任意の位置の電圧、電流の式がどうなるか検討してみましょう。最終的に導かれる電圧式は(11.7)式です。

電流の式は(11.10)式です。

計算式がかなり出て来てしまいます。

最後に得られる式を利用して終端短絡の有限長線路で電圧、電流、インピーダンスの値がどのようなかプロットしていろいろ検討することが有益でしょう。本稿でもその一例のプロットを示しています。

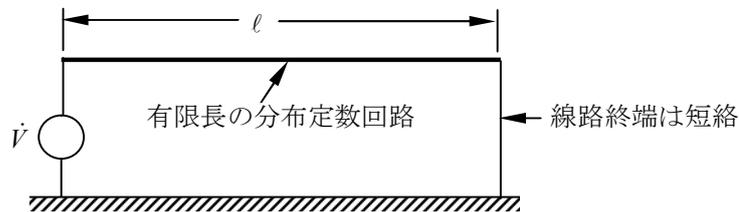


図 11.1-1 終端短絡の有限長線路モデル

1) 電圧源は距離  $x = 0$  で  $\dot{V} = \dot{E}$  (V) であるとします。

2) 終端が接地されていますから距離  $x$  が  $l$  (m) で  $\dot{V} = 0$  (V) です。

これら 2 つが境界条件になります。

(10.7)の一般解にこれらの境界条件を入れて、任意定数  $\dot{C}, \dot{D}$  を決定しましょう。

1)の境界条件を(10.7)式に入れると  $\dot{V}$  は

$$\dot{E} = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{r} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{r} \cdot 0) = \dot{C} \cdot \cosh(0) + \dot{D} \cdot \sinh(0) \quad (11.1)$$

$\sinh(0) = 0$ ,  $\cosh(0) = 1$  ですから、(10.7)式は次のようになり、任意定数  $\dot{C}$  が確定します。

$$\dot{C} = \dot{E} \quad (11.2)$$

次に境界条件 2) をやはり(10.7)式に入れ、(11.2)式の結果も加味すると(10.7)式は次のようになります。

$$0 = \dot{E} \cdot \cosh(\dot{r} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{r} \cdot \ell) \quad (11.3)$$

この(11.3)式を変形すれば、任意定数  $\dot{D}$  は次のように求められます。

$$\dot{D} = -\dot{E} \cdot \frac{\cosh(\dot{r} \cdot \ell)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \quad (11.4)$$

このようにして得られた式(11.2),(11.4)の任意定数  $\dot{C}, \dot{D}$  を(10.7)式に代入して次式が得られます。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{E} \cdot \cosh(\dot{r} \cdot x) - \dot{E} \cdot \frac{\cosh(\dot{r} \cdot \ell)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) \\ &= \frac{\dot{E} \{ \cosh(\dot{r} \cdot x) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot \ell) - \cosh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) \}}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \end{aligned} \quad (11.5)$$

ところで双曲線関数についても三角関数と同様に次の加法定理が成立します。

$$\sinh(\dot{r} \cdot \ell \pm \dot{r} \cdot x) = \cosh(\dot{r} \cdot x) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot \ell) \pm \cosh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) \quad (11.6)$$

この加法定理から(11.5)式は次のように変形できます。

$$\dot{V} = \frac{\dot{E} \cdot \sinh \dot{r}(\ell - x)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \quad (11.7)$$

これが終端短絡の有限長線路の任意の距離  $x$  における電圧の大きさを表す式です。

次に(10.8)式の電流の式に(11.2), (11.4)で得られた  $\dot{C}, \dot{D}$  の内容を代入して、任意定数が無い電流式を求めましょう。

$$\dot{I} = -\dot{Y}_0 \left\{ \dot{E} \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) - \dot{E} \cdot \frac{\cosh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{r} \cdot x)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \right\} = -\dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \left\{ \frac{\sinh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) - \cosh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{r} \cdot x)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \right\} \quad (11.8)$$

ここで{ }内の分子は双曲線関数の  $\cosh$  の加法定理から

$$\sinh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{r} \cdot x) - \cosh(\dot{r} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{r} \cdot x) = -\cosh(\dot{r} \cdot \ell - \dot{r} \cdot x) = -\cosh \dot{r}(\ell - x) \quad (11.9)$$

ですから、(11.9)式を(11.8)式の分子に代入して次の電流に関する式が得られます。

$$\dot{I} = -\dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \left\{ \frac{-\cosh \dot{r}(\ell - x)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \right\} = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cosh \dot{r}(\ell - x)}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \quad (11.10)$$

これが終端短絡の有限長線路の任意の距離  $x$  における電流の大きさを表す式です。

(11.10)式に始端  $x = 0$  の条件を入れれば始端電流  $\dot{I}_0$  を求めることができ、次のようになります。

$$\dot{I}_0 = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cosh \dot{r} \cdot \ell}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \coth(\dot{r} \cdot \ell) \quad (11.11)$$

次に終端での電流  $\dot{I}_\ell$  は(11.10)式に  $x = \ell$  を代入して

$$\dot{I}_\ell = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cosh 0}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} = \frac{\dot{Y}_0 \cdot \dot{E}}{\sinh(\dot{r} \cdot \ell)} \quad (11.12) \text{ を得ます。}$$

また(11.11)式から  $\dot{Y}_0 \cdot \dot{E} = \frac{\dot{I}_0}{\coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}$  ですからこれを 11.12)式に入れると終端電流は

$$\dot{I}_\ell = \frac{\dot{I}_0}{\frac{\coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}} = \frac{\dot{I}_0}{\coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \cdot \frac{1}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \dot{I}_0 \cdot \frac{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \cdot \frac{1}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \frac{\dot{I}_0}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}$$

(11.13)

とも表現できます。

次に始端から見たこの終端短絡有限長分布定数回路のインピーダンス  $\dot{Z}_{\ell=0}$  がどのような式になるか検討してみましょう。

始端から見たインピーダンス  $\dot{Z}_{\ell=0}$  は(11.11)式の始端電流  $\dot{I}_0$  と始端の電圧  $\dot{E}$  で定義できますから

$$\dot{Z}_{\ell=0} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_0} = \frac{\dot{E}}{\dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \dot{Z}_0 \cdot \tanh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \quad (11.14)$$

となります。

(11.14)式は始端から見た線路インピーダンスは  $\dot{Z}_0$ ,  $\dot{\Gamma}$  は線路が一様であれば一定値であるので、線路長  $\ell$  の関数で変化することを示しています。

## 11.2 終端短絡の有限長分布定数回路の電圧、電流、インピーダンスのプロット例

最初に(11.7)式で表される電圧波形、(11.10)式の電流波形、(11.14)式のインピーダンス波形はどのような波形になるかこれらの数式を使って一例をプロットしてみましょう。

このプロット準備として検討対象の線路を単相の銅線の架空線として線路定数を先ず求めましょう。

架空線は高さ 10 m に設置され、銅線の電気抵抗率  $\rho = 1.68E-8$  ( $\Omega\text{m}$ )、銅線の半径は 0.005 m、線路長は 3E6 (m)とします。

電源は周波数 50 Hz の正弦波で Peak 値は 1,000 V としましょう。

交流の場合、表皮効果があるので交流抵抗 > 直流抵抗ですが商用周波数なので抵抗は直流抵抗  $R$  に等しいと仮定します。

すると単位長(1m)当たりの抵抗は

$R = \rho \frac{\ell}{S}$  から求められます。 $\rho$  は電気抵抗率(導電率の逆数です)で  $\rho = 1.68E-8$  ( $\Omega\text{m}$ )、 $\ell$  は 1m、 $S$  は導体断面積( $\text{m}^2$ )で  $S = \pi(0.005)^2$  ( $\text{m}^2$ )ですから、これらの値から、抵抗  $R$  は次の値になります。

$$R = 1.68E-8 \cdot \frac{1}{\pi(0.005)^2} = 0.213904243E-3 \quad (\Omega/\text{m}) \quad (11.15)$$

単位長当たりのインダクタンスは(4.10)式から

$$L \cong \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ell n \frac{2 \cdot h}{r} = \frac{4E-7 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \ell n \frac{2 \cdot 10}{0.005} = 0.1658809928 E-5 \quad (\text{H}/\text{m}) \quad (11.16)$$

単位長当たりのキャパシタンスは(4.11)式から

$$C \cong \frac{2\pi\epsilon_0}{\ell n(2 \cdot h/r)} = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot E7}{4 \cdot \pi \cdot (3 \cdot E8)^2} \cdot \frac{1}{\ell n\left(\frac{2 \cdot 10}{0.005}\right)} = 0.669824247310 E-11 \quad (\text{F}/\text{m}) \quad (11.17)$$

漏れコンダクタンス  $G$  については一般に小さいのでここでは無視して 0 (S/m)と仮定します。

線路定数がこのように確定したので、次にこれら定数からこの線路の減衰定数と位相定数を求めます。

(6.13)式と(6.14)式にこれらの線路定数を代入すると、計算の途中経過は省略しますが次の結果になります。

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.2106951032 \text{ E} - 6 \\ \beta &= 0.1068183101 \text{ E} - 5\end{aligned}\quad (11.18)$$

$$\text{つまり、 } \dot{r} = 0.2106951032 \text{ E} - 6 + j 0.1068183101 \text{ E} - 5 \quad (11.19)$$

又(4.13)式に上記の線路定数  $R, L, C, G$  を代入して特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$  を求めると、次の結果になります。

$$\dot{Y}_0 = (0.1896220103 \text{ E} - 2) + (j \cdot 0.3740222881 \text{ E} - 3) \quad (11.20)$$

したがって、

$$\dot{Z}_0 = \frac{1}{\dot{Y}_0} = 507.6156063 - j 100.1252704 \quad (11.21)$$

$$|Z_0| = 517.3960509 \text{ (}\Omega\text{)} \quad (11.22)$$

以上でプロットするための準備は完了です。

#### 電圧波形のプロット

(11.7)式に上記で得られた定数を代入し、且つ  $\dot{E}$  は 1000V の Peak 時の瞬時を取ってその時の分布定数回路に沿った電圧分布を数式からプロットしてみます。

$\dot{E}$  は 1000V の Peak 時の瞬時を考えるので、(11.7)式の複素電圧の内、余弦波形となる(11.23)式のように実数部を取ってプロットすれば良いことになります。 $V_x$  は任意の距離  $x$  における電圧を示しています。

$$V_x = \text{Re} \left( \frac{\dot{E} \cdot \sinh \dot{r}(\ell - x)}{\sinh \dot{r} \cdot \ell} \right) \quad (11.23)$$

この(11.23)式の演算は次のようになります。

まず分子を指数関数形式に変換して次式が得られます。

$$V_x = \dot{E} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \exp((\alpha + j \cdot \beta) \cdot (\ell - x)) - \frac{1}{2} \cdot \exp(-(\alpha + j \cdot \beta) \cdot (\ell - x)) \right) \quad (11.24)$$

(11.24)式中の  $\dot{E}$  は最大値を  $E_m$  とし、角速度を  $\omega$  とすれば

$$\dot{E} = E_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \quad (11.25)$$

なので、この関係を(11.24)式に入れて実数部と虚数部に分けて整理すると次式を得ます。

$$\frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \exp\{j \cdot (\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x)\} - \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \exp\{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x)\} \quad (11.26)$$

(11.26)式中の  $j$  が含まれている指数関数部は  $\exp\{j \cdot (A)\} = \cos(A) + j \cdot \sin(A)$  (11.27) と変換できるので、この関係を(11.26)式に入れて次式を得ます。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \{\cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x)\} - \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \\ \{\cos(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x) + j \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x)\}\end{aligned}\quad (11.28)$$

後述の(11.30)式のように  $g + j \cdot h$  の形の分母の複素数で除するため( $g, h$  は共に正の値)、位相が遅れるのでこの位相遅れ  $\theta$  を加味すると(11.27)式は次式になります。複素数の除算の結果位相が遅れる理由は Appendix 2 に解説してあります。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \{\cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x - \theta) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x - \theta)\} - \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \\ \{\cos(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x - \theta) + j \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x - \theta)\}\end{aligned}\quad (11.29)$$

電源電圧が最大の瞬時の線路に沿った電圧分布を求めるので(11.28)式の複素電圧の内、実数部(余弦曲線)を取って検討すれば良いことになります。

よって(11.29)式は次式になります。

$$\frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x - \theta) - \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x - \theta) \quad (11.30)$$

(11.30)式はひとまずこの形のままで置いておき、次に(11.23)式の分母を計算します。 $\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)$ に11.2項の線路定数を入れて計算すると次の結果が得られます。

$$\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) = -(0.6736865621 + j \cdot 0.07590742107) \quad (11.31)$$

(11.31)式で(11.30)式を除します。複素数での除算は(11.31)式の絶対値で(11.30)式を除せば良いことになります。この理由についてもAppendix 2に解説してあります。

(11.31)式の絶対値は

$$\sqrt{(0.6736865621)^2 + (-0.07590742107)^2} = 0.6779494971 \quad (11.32)$$

またこの除算による位相遅れ $\theta$ は

$$\theta = \arctan \frac{-0.07590742107}{0.6736865621} = 0.1122014607 \quad (\text{rad.}) \quad (11.33)$$

(11.33)式の位相を(11.30)式に入れ、(11.32)式で(11.30)式を除します。この時、(11.31)式に一符号が付くのでこれも(11.30)式に反映させて最終的に次の式が得られます。

$$V_x = -0.735180630 \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x - \theta) + 0.735180630 \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(-\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x + \theta) \quad (11.34)$$

この(11.34)式に11.2項の定数を入れ、且つ $t=0$ として $x=0 \rightarrow 3E6$  (m)まで変化させた時の電圧分布は次図の通りになります。

最終的に得られた(11.34)式はこのように入力データを入れて電圧波形をプロットすることでき、分布定数回路上の距離 $x$ と共に電圧の大きさの絶対値がどう変化するか視覚化して検討することができます。

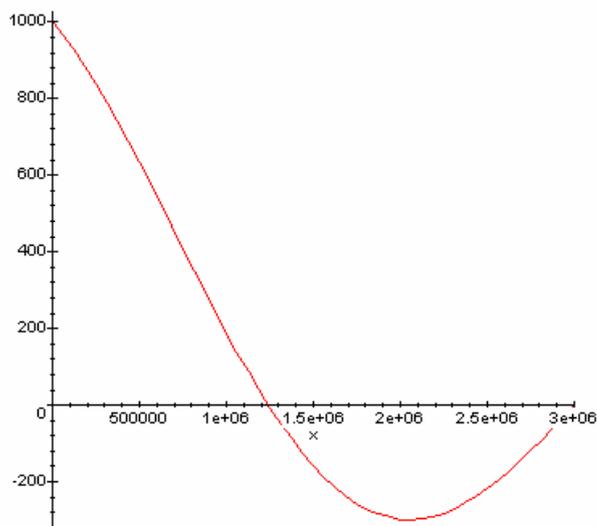


図 11.2-1 終端短絡の有限長線路に沿った電圧分布の一例

次表の左欄の距離における電圧値を(11.34)式から計算すると次表の「電圧値(V)」のとおりになります。「simulation」欄は ATP でシミュレーションした結果の電圧値です。このシミュレーション方法と結果については第 14 項で解説しています。ATP によって解を求める方法は数式から求める方法と比べると格段に簡便です。次表から数式から得られた結果と ATP のシミュレーション結果が良く整合しているのがおわかりになると思います。

電源からの距離 (m)	電圧値 (V)	simulation
0.5E6	635	635
1E6	189	189
1.5E6	-159	-159
2E6	-298	-298
2.5E6	-218	-218
3.0E6	0	0

表 11-1

図 11.2-1 の波形はかなり無歪の余弦波から見るとピーク値から略直線状に減衰する波形となり歪んでいますね。これは終端がインピーダンス 0 で接地されているため終端で電圧の負反射が発生したためと思われます(終端は短絡されているので電圧は常に 0 に保たれます。終端短絡線路の終端ではこのため進入波と反射波の合成で 0 になるよう反対極性の負反射が発生します)。このため終端を反射が発生しないようにした時の電圧分布と比較してみましょう。反射の影響を無くすには同じ線路定数を持つ半無限長分布定数回路にすれば良いですね。それでは(3.9)式の半無限長線路の電圧式に 11.2 項の線路定数を入力し、電圧が最大値の時の次の式を使って、距離  $x=0$  から  $3E6$  (m) までプロットして見ましょう。(3.9)式は正弦波電圧のものなので余弦波にした次式を使います(今考察しているのは  $t=0$  で電圧が Max. の状態であるためです)。

$$v = E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot 0 - \beta \cdot x) = 1000 \cdot \exp(-.2106951032E-6 \cdot x) \cdot \cos(.1068183101E-5 \cdot x) \quad (11.35)$$

図 11.2-2 に図 11.2-1 の終端短絡の場合の電圧分布と共に同じ線路定数を持つ半無限長線路の電圧分布を示します。

図 11.2-2 の如く半無限長線路として反射を無くした結果、半無限長の場合は歪が解消され指数関数で減衰する正弦波になりました。

また図 14 から、半無限長線路とすれば終端に相当する点での負反射がなくなるので、この点の電圧は大きくなっているのがわかりますね。

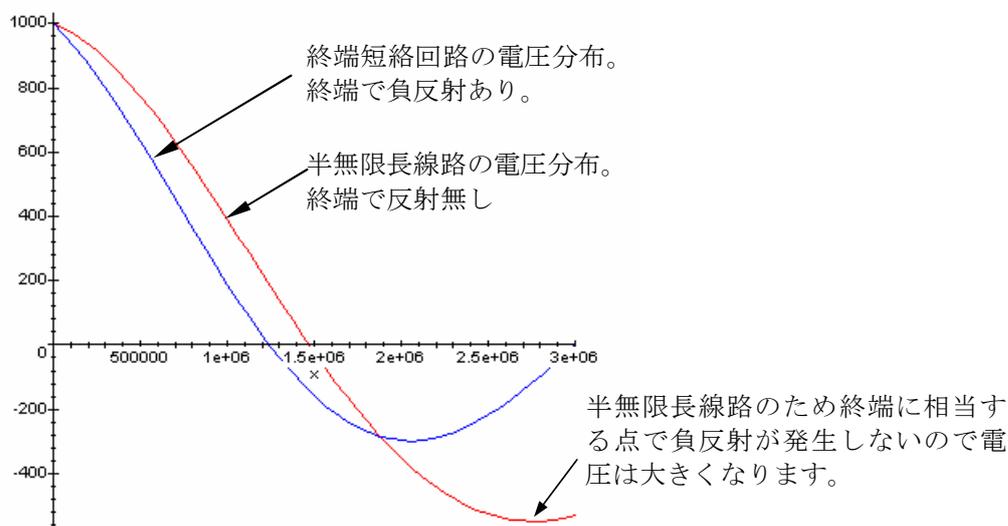


図 11.2-2 反射の有無による電圧分布の違い

このように商用周波数の世界であっても反射現象はありますが通常扱っている線路長が短い  
ため無視されています。

尚、(11.34)式で任意の距離  $x$  を与え、 $t$  をパラメータとして、任意の距離  $x$  における電圧の  
変化をグラフ化することもできますね。この例を次に示します。

任意の距離として  $x=1.5E6$  (m) を与えて  $t=0 \rightarrow 0.02$  sec. 間の電圧の変化の様子を  
見てみましょう。

下図左側の波形がこのようにして(11.34)式の数式から得られた電圧波形です。

また下図右側は ATP によるシミュレーション結果ですが同じ結果が得られています。

繰り返しの強調になり恐縮ですが ATP によるシミュレーション方法の方が極めて簡単で、  
数式から求める方法から比べると格段に楽です。

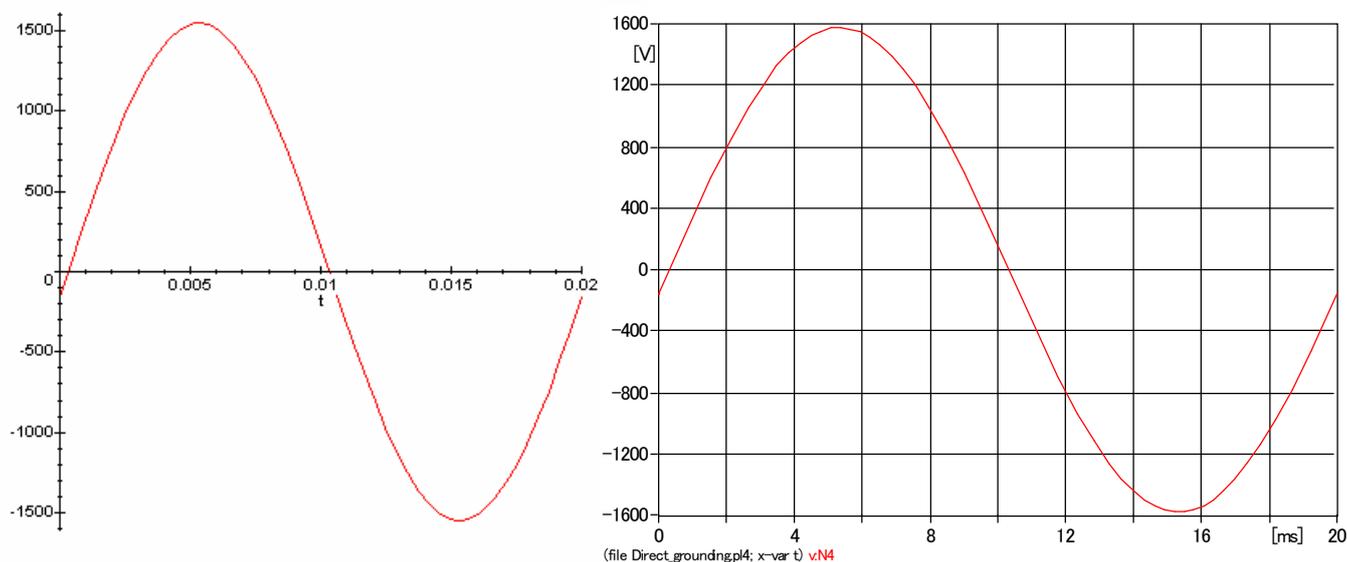


図 11.2-3 距離 1.5E6(m)における電圧の時間変化

この図からわかるように線路上の任意の一点で電圧を観察すると電圧は正弦波状に振動して  
います。

次に 11.2 項の線路定数を持つ終端短絡の分布定数回路上の電流分布プロットしてみましょう。

電流の式である(11.10)式中の  $\dot{Y}_0$  の部分は既に述べた(11.20)式のとおりです。

分母の  $\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)$  部分は (11.31)式の結果を流用できます。

以上から  $\frac{\dot{Y}_0}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \frac{1}{\dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}$  の部分を計算すると次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} &= \frac{1}{(507.6156063 - j \cdot 100.1252704) \cdot \{-(0.673686562 + j \cdot 0.759074210 \cdot 7E-1)\}} \\ &= \frac{-1}{349.5740637 - j \cdot 28.92125763} \end{aligned} \tag{11.36}$$

(11.36)式の分母の絶対値は

$$\sqrt{(349.5740637)^2 + (28.92125763)^2} = 350.7683924 \quad (11.37)$$

となるので、この絶対値で(11.10)式の残りの分子部分を除すればよいことになります。  
ところで(11.36)式の  $g-j \cdot h$  の形の分母の複素数による除算では位相が進みます。(この理由については Appendix 2 を参照ください)。この進み位相角は

$$\theta = \arctan \frac{28.92125763}{349.5740637} \quad (11.38) \quad \text{だけ位相が進むことになります。}$$

さて(11.10)式の残りの部分である  $\dot{E} \cdot \cosh \dot{I}(\ell-x)$  は exp 形式に変換すると次式になります。

$$\begin{aligned} & E_m \cdot \exp(j \cdot \omega \cdot t) \left\{ \frac{1}{2} \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \exp(j \cdot (\beta \cdot \ell - \beta \cdot x)) + \frac{1}{2} \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \exp(j \cdot (\beta \cdot x - \beta \cdot \ell)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \exp(j \cdot (\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x)) + \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \exp(j \cdot (\omega \cdot t + \beta \cdot x - \beta \cdot \ell)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot (\cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x)) + \\ & \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot (\cos(\omega \cdot t + \beta \cdot x - \beta \cdot \ell) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta \cdot x - \beta \cdot \ell)) \end{aligned} \quad (11.39)$$

ここで  $E_m = 1000$  (V)Peak の時を考えれば(11.39)式の余弦波形部分を考えれば良く、これを(11.37)式の分母の絶対値で除するようにし、さらに(11.38)式の  $\theta$  を反映させて次式が得られます。

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \frac{1}{350.7683924} \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x + \theta) \\ & - \frac{1}{2} \cdot E_m \cdot \frac{1}{350.7683924} \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot x - \beta \cdot \ell + \theta) \end{aligned} \quad (11.40)$$

(11.40)式に 11.2 項の線路定数と(11.38)の  $\theta$  を入れて  $t$  を固定して  $x$  をパラメータとして検討したり、又はその逆の検討もできますね。

例えば距離  $x = 1.5E6$  (m)の地点の電流が時間  $t = 0 \rightarrow 0.02$  (sec)間にどのような変化をするかプロットしてみましょう。結果は次図左側になります。次図右側は ATP のシミュレーション結果です。同じ結果が得られています。

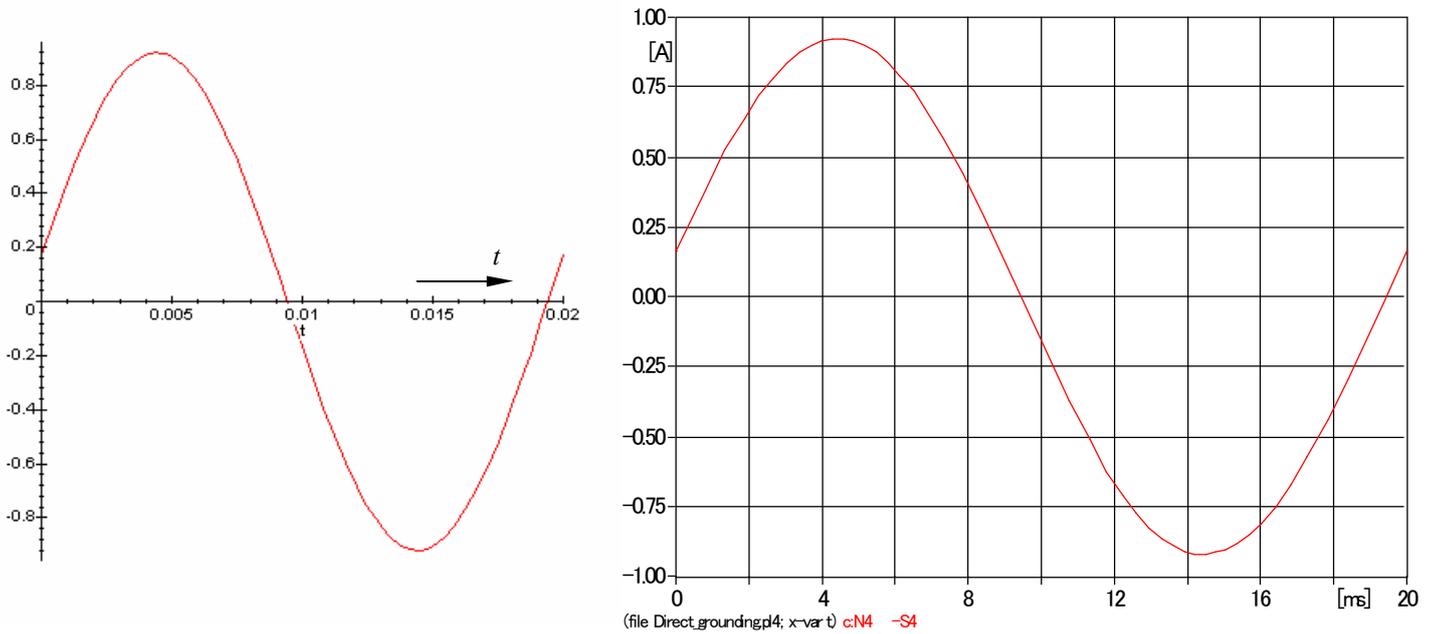


図 11.2-4 距離  $1.5E6(m)$ における電流の時間変化

(11.36)式を使って各瞬時に於いて、電流が線路長に沿ってどのように分布するかも検討できます。例えば  $t=0, 0.005, 0.01, 0.015$  の各瞬時の時電流が  $x=0 \rightarrow 3E6(m)$  に亘ってどのように分布するか計算した結果は下図になります。

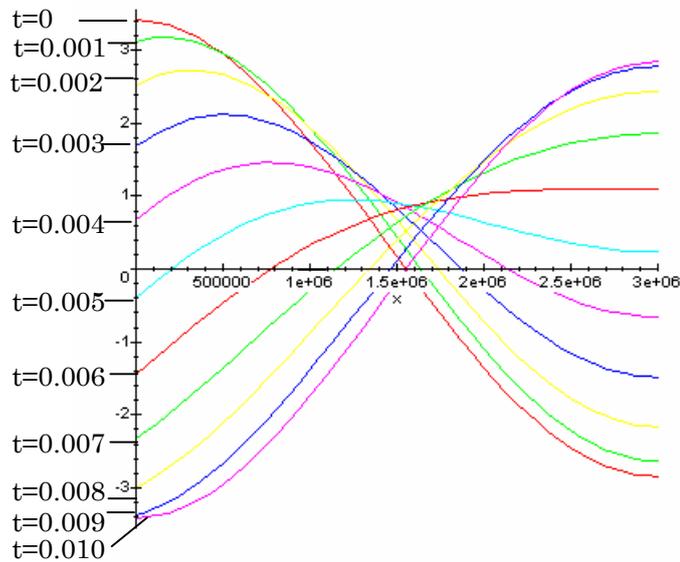


図 11.2-5 各時間における線路上の電流分

このように線路に沿った電流の大きさは振動していて時々刻々変化しているのですね。

次に(11.14)式で与えられた始端から見たインピーダンス  $Z_{\ell=0}$  についてもうすこし検討してみましよう。

(11.14)式に 11.2 項の線路定数を入れて次式となります。(11.14)式の  $\ell$  は線路長を表わしています。ここでは線路長を変化させて様子を見るため、 $\ell \rightarrow x$  に変えて変数であることを示すことにします。すると(11.14)式は次のようになります。

$$Z_{\ell=0} = (507.6156063 - j 100.1252704) \cdot \tanh\{(0.2106951032 \text{E} - 6 + j 0.1068183101 \text{E} - 5) \cdot x\} \quad (11.41)$$

となり、始端から見た複素インピーダンスは線路長  $x$  の関数になります。

尚、この線路の場合、始端から見たインピーダンスはキャパシティブ回路の複素インピーダンスになります。(  $x$  に適当な線路長を入れて計算すれば  $Z = R - j \cdot X$  の形になるのがわかります。)

この複素インピーダンスの絶対値は次式で求められます。

$$Z_{\ell=0abs} = 517.3960509 |\tanh((0.2106951032 \text{E} - 6 + j 0.1068183101 \text{E} - 5) \cdot x)| \quad (11.42)$$

線路長が大きくなるにつれて始端から見た線路インピーダンスは特性インピーダンスに収束すると言われています。本当にそうなるか  $x = 1.5 \text{E}7$  (m) まで延長して、始端から見たインピーダンスを(11.42)式を使って計算してみましょう。

図 11.2-6 のように距離が長くなるにつれて一定値に収束する傾向が観察されます。

1.5E7(m)における値を(11.42)式から計算すると

$Z_{\ell=0abs} = 515.8940385$  (Ω) となってこの線路の特性インピーダンス  $|Z_0| = 517.3960509$  (Ω) に漸近しているのがわかります。

このことは(11.42)式で  $x \rightarrow \infty$  の時、 $|\tanh((0.2106951032 \text{E} - 6 + j 0.1068183101 \text{E} - 5) \cdot x)|$  の部分は 1 に収束することから、線路長が大きくなるにつれて始端から見た線路インピーダンスは特性インピーダンスに収束するわけですね。下図は収束状況がわかるように線路長を 1.5E7(m) まで延長してプロットしています。

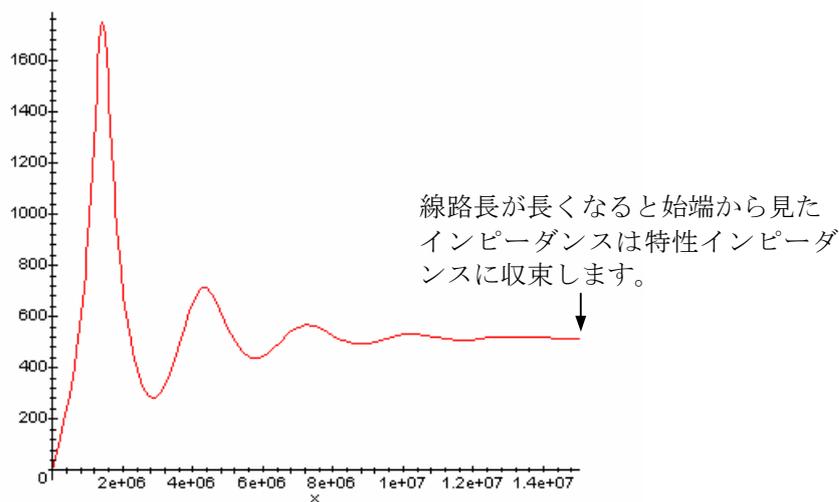


図 11.2-6 線路始端から見たインピーダンスの線路長による変化

### 11.3 終端短絡の無損失有限長分布定数回路

無損失の終端短絡の有限長分布定数回路について検討してみましょう。このケースの場合は線路の共振状態と反共振状態という特殊現象が出現します。

任意の位置  $x$  の電圧式である(11.7)式は無損失回路となると、伝搬定数は 6.2 項の 1)、2)項から  $\alpha = 0$ 、 $\beta = \omega\sqrt{L \cdot C}$  ですから、伝搬定数  $\dot{\Gamma} = \alpha + j \cdot \beta \Rightarrow j \cdot \beta$  となります。この  $\dot{\Gamma}$  を(11.7)式の  $\dot{\Gamma}$  に代入して(11.43)式を得ます。

$$\dot{V} = \frac{\dot{E} \cdot \sinh(j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot (\ell - x))}{\sinh(j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)} \quad (11.43)$$

双曲線関数の性質として

$\sinh(j \cdot x) = j \cdot \sin(x)$  なので(11.43)式にこの関係を入れて(11.44)式を得ます。

$$\dot{V} = \frac{\dot{E} \cdot \sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot (\ell - x))}{\sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)} \quad (11.44)$$

電流の式は(11.10)式から  $\dot{I} = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x)}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}$  です。この電流の式に、

1)  $\cosh(j \cdot x) = \cos(x)$  及び  $\sinh(j \cdot x) = j \cdot \sin(x)$  の関係と、2) 無損失分布定数回路の  $\dot{Y}_0$  は(4.13)式に

$R = G = 0$  を入れて  $\dot{Y}_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$  の関係と、3) 上述の  $\dot{\Gamma} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C}$  の関係式を

(11.10)式に代入して次の(11.45)式を得ます。

$$\dot{I} = \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x)}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \dot{E} \cdot \frac{\cos(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot (\ell - x))}{j \cdot \sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)} = -j \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{\cos(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot (\ell - x))}{\sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)} \cdot \dot{E} \quad (11.45)$$

(11.44)式、(11.45)式共、分母は  $\sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)$  で同じです。この分母が 0 に漸近する時、 $\dot{V}$ 、 $\dot{I}$  とも無限大になり、線路の共振状態が出現します。

電圧、電流が無限大になる分母が 0 になる条件を求めてみましょう。

その条件は  $\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell$  が  $\pi$  の整数倍であれば  $\sin(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell) = 0$  になります。つまり  $n = 1, 2, 3 \dots$  の整数とした時、次式が分母=0 になる条件になります。

$$\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell = n \cdot \pi \quad (11.46)$$

何らかの理由で  $\omega$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $\ell$  の値が変化して(11.46)を満足するようになると、分母は 0 に近づくので電圧、電流が無限大に急増する共振状態になります。

この共振は(11.46)を満足すれば発生するので、共振点は多数存在することになります。

共振状態を観察するため一例として次の条件として周波数を変えた時の  $x = \ell/2$  の距離の電圧波形を観察して見ましょう。

1) 無損失回路とし、 $R=G=0$  とします。 $L, C$  の値は 11.2 項の値と同じとします。

2) 線路長は 2.941176.471E6 (m) とします(この半端な距離は種を明かせば 51Hz で共振状態が発生するよう、(11.46)式から  $n=1$  として  $\frac{\pi}{2 \cdot \pi \cdot 51 \cdot \sqrt{L \cdot C}}$  として逆算したものです。)

3) 電圧は 1000 Vpeak 時とします。

すると(11.44)式は次式になります。

$$\dot{V} = \frac{1000 \cdot \sin(0.030799927 \cdot 96 \cdot f)}{\sin(0.061599855 \cdot 95 \cdot f)} \quad (11.47)$$

これらの条件下で周波数を 10 Hz から 50.5Hz まで変化させると  $x = \ell/2$  の電圧は下図の如く共振状態に漸近し電圧値は急増します。

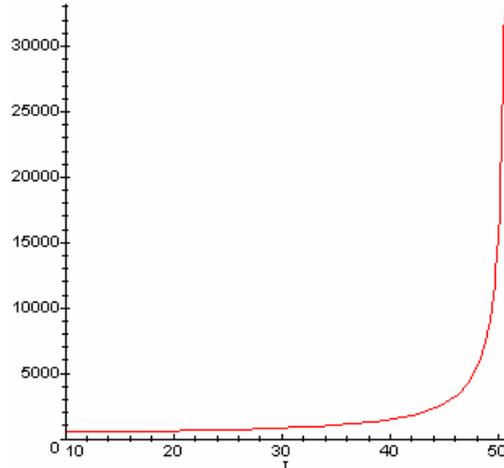


図 11.3-1 終端短絡の無損失線路電圧の周波数変化による共振状態

この回路の共振周波数(共振する時の振動数ですから回路の固有振動数とも言えます)について考えてみましょう。

共振周波数を  $f_n$  とします。

共振の時でも周波数  $f_n$  と角速度  $\omega$  の間は  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_n$  ですから変形して

$$f_n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \text{ となります。角速度 } \omega \text{ は(11.46)式から } \omega = \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{L \cdot C \cdot \ell}} \text{ ですから}$$

$$f_n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{L \cdot C \cdot \ell}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} = \frac{n}{2 \cdot \sqrt{L \cdot C \cdot \ell}} \quad (11.48) \text{ となります。}$$

(11.48)式から共振周波数は  $n, L, C$  が固定値と考えられる時は分布定数の線路長  $\ell$  で決まります。

また  $n=1$  の時の共振周波数  $f_1$  を基本共振周波数と言います。

基本共振周波数がわかればその整数倍も共振周波数になることも(11.48)式から理解できますね。

次に無損失終端短絡の有限長分布定数回路の始端より見たときの線路インピーダンスがどうなるか検討しましょう。

損失がある場合の終端短絡の有限長分布定数回路の始端より見たインピーダンスの絶対値  $|Z_{\ell=0}|$  は(11.14)式から

$|\dot{Z}_{\ell=0}| = |\dot{Z}_0 \cdot \tanh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)|$  です。この式に無損失回路の条件を入れて無損失分布定数回路の始端から見たインピーダンスの絶対値がどのような式になるのか検討します。

無損失分布定数回路の特性インピーダンスは(4.9)から  $Z_0 = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot L}{j \cdot \omega \cdot C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  です。

また無損失回路の伝搬定数  $\dot{\Gamma}$  は 6.2 項の 1) より減衰定数  $\alpha = 0$ 、6.2 項の 2) より位相定数  $\beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C}$  となるので  $\dot{\Gamma} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C}$  です。これらの  $Z_0, \dot{\Gamma}$  の関係式を

$|\dot{Z}_{\ell=0}| = |\dot{Z}_0 \cdot \tanh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)|$  に代入して

$$|\dot{Z}_{\ell=0}| = |\dot{Z}_0 \cdot \tanh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)| = \left| \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \tanh(j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell) \right| \quad (11.49) \text{ となります。}$$

双曲線関数の性質から  $\tanh(j \cdot x) = j \cdot \tan(x)$  ですから、この関係を(11.49)式に入れて、始端から見たインピーダンスは

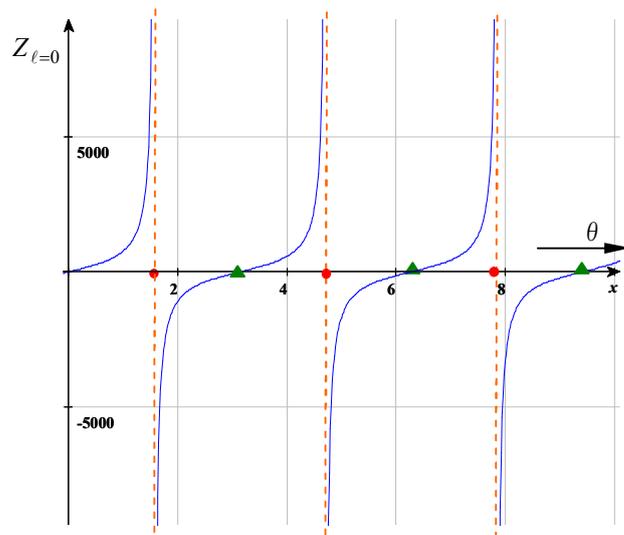
$$|\dot{Z}_{\ell=0}| = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \tan(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell) \quad (11.50) \text{ となります。}$$

(11.50)式を  $\theta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell$  を横軸にとって  $|\dot{Z}_{\ell=0}|$  を縦軸に取って表示すると図 11.3-2 の正接曲線になります。

プロットする上で使用した定数は次のようになります。

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = 497.64 \text{ } (\Omega)$$

$\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell = \theta$  は 0 から 10 へ変化させています。



赤丸のところは反共振点  
三角のところは共振点

図 11.3-2 無損失の終端短絡分布定数回路の始端から見たインピーダンス、共振と反共振が出現します

(11.50)式で角度に相当する  $\theta = (\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)$  が例えば  $\omega$  の増加により増加して

$\frac{\pi}{2}, \frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{5 \cdot \pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2}$  の時は始端から見たインピーダンスは  $\infty$  の反共振状態となり、

また  $\pi, 2 \cdot \pi, 3 \cdot \pi, \dots, n \cdot \pi$  の時は始端から見たインピーダンスは 0 となり共振状態となります。

無損失の分布定数回路を始端から線路インピーダンスを眺めている時、 $(\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \ell)$  が変化すると、このようにインピーダンスが 0(共振状態)になったり  $\infty$ (反共振状態)になったりする場合があります。ということは驚きですね。

#### 11.4 終端開放の有限長分布

終端短絡の検討が終わったので、今度は分布定数回路の終端を開放した場合について検討しましょう。

線路に沿った電源からの任意の距離  $x$  における電圧  $\dot{V}$ 、電流  $\dot{I}$ 、及び始端から見たインピーダンス  $\dot{Z}_\ell$  の式がどのように表されるか検討しましょう。

その後で、この線路終端開放のケースでは電圧は終端で正反射されるので終端の電圧は同じ線路定数を持つ半無限長線路の場合より高くなる筈ですね。このような現象になるか確認してみましょう。

検討対象の分布定数回路は図 11.4-1 です。

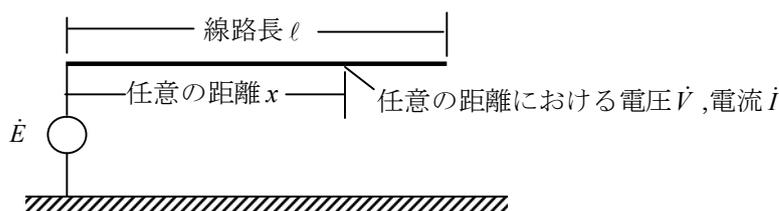


図 11.4-1 検討対象の終端開放、有限長分布定数回路

このケースの任意の距離  $x$  における電圧、電流の式を求めるにはやはり双曲線関数で表された有限長線路の電圧と電流の一般解(10.7)式と(10.8)式から検討を始めます。

このケースの境界条件は

$$\begin{aligned} x=0 \text{ で } \dot{V} &= \dot{E}, \\ x=l \text{ で } \dot{I} &= 0 \end{aligned} \quad (11.51) \quad \text{ですね。}$$

この境界条件を一般解の式に入れて任意定数を決めることができます。

(11.51)式の電圧に関する境界条件を(10.7)式に入れると  $\cosh(0)=1$ ,  $\sinh(0)=0$  ですから、

$$\dot{E} = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = \dot{C} \quad (11.52) \quad \text{が得られます。}$$

また電流に関する境界条件を電流の一般解(10.8)式に入れて、

$$-\dot{Y}_0 \{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \} = 0 \quad (11.53) \quad \text{が得られます。}$$

(11.53)式の  $\dot{C}$  に(11.52)の結果を入れて

$$-\dot{Y}_0 \{ \dot{E} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \} = 0 \quad (11.54) \quad \text{となります。線路は } \dot{Y}_0 \neq 0 \text{ で}$$

すから(11.37)式が成立するためには

$$\dot{E} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) = 0 \quad (11.55) \quad \text{となります。この式から } \dot{D} \text{ を}$$

求めれば

$$\dot{D} = -\frac{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \cdot \dot{E} \quad (11.56)$$

(11.52)式及び(11.56)式を(10.7)式に入れて整理すると(11.57)の任意の距離  $x$  における電圧の式が得られます。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) = \dot{E} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \frac{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \cdot \dot{E} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \\ &= \dot{E} \cdot \frac{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} = \boxed{\dot{E} \cdot \frac{\cosh \dot{\Gamma}(\ell - x)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}} \quad (11.57) \end{aligned}$$

ではこの式で表される線路に沿った電圧分布を計算してみましょう。線路定数は例によって11.2項のデータを使います。

(11.40)式から次式を導く方法は先の11.2項の(11.23)式～(11.34)式と同様の考え方で導くことが

できます。

$$V_x = \frac{-E_m}{1.204864685} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \exp(-\alpha \cdot x + \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot \ell - \beta \cdot x - \theta) + \frac{1}{2} \cdot \exp(\alpha \cdot x - \alpha \cdot \ell) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot \ell + \beta \cdot x - \theta) \right] \quad (11.58)$$

ここで1.204864685は分母の計算結果の絶対値です。 $E_m$ の-符号は分母の演算結果出てきます。

$\theta$ は複素数の除算による位相遅れで、この値は $\theta = \arctan\left(\frac{0.4246917295}{1.204115974}\right) = 0.03525538805$

(rad.)です。(11.)式で $t = 0$ の時距離0から3E6(m)までの電圧分布を計算すると次図になります。

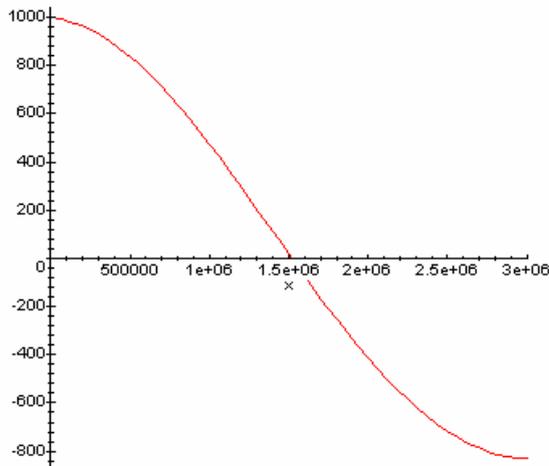


図 11.4-2 終端開放の有限長分布定数回路の電圧分布

終端電圧は $x = 3E6$  (m)を(11.58)式に入れて-829 (V)が得られます。この値は図 11.2-2 の半無限長線路とした場合の3E6(m)の距離における電圧値より終端での正反射のため高くなっているのがわかりますね。

次に(11.58)式を利用して距離が0.5E6, 1.0E6, 1.5E6, 2.0E6, 2.5E6, 3E6 (m)の各位置の電圧の時間変化の挙動を調べてみます。

数式から計算した結果は下図左側の波形となります。ATP による結果は下図右側となります。同じ結果が得られていることがわかります。

下図の二つの図は共に  $t=0$  の Y 軸と交差する一番上の波形から順に、0.5E6(m), 1.0E6(m), 1.5E6(m), 2E6(m), 2.5E6(m), 3.0E6(m) の地点における電圧の時間と共に変化する様子を示しています。

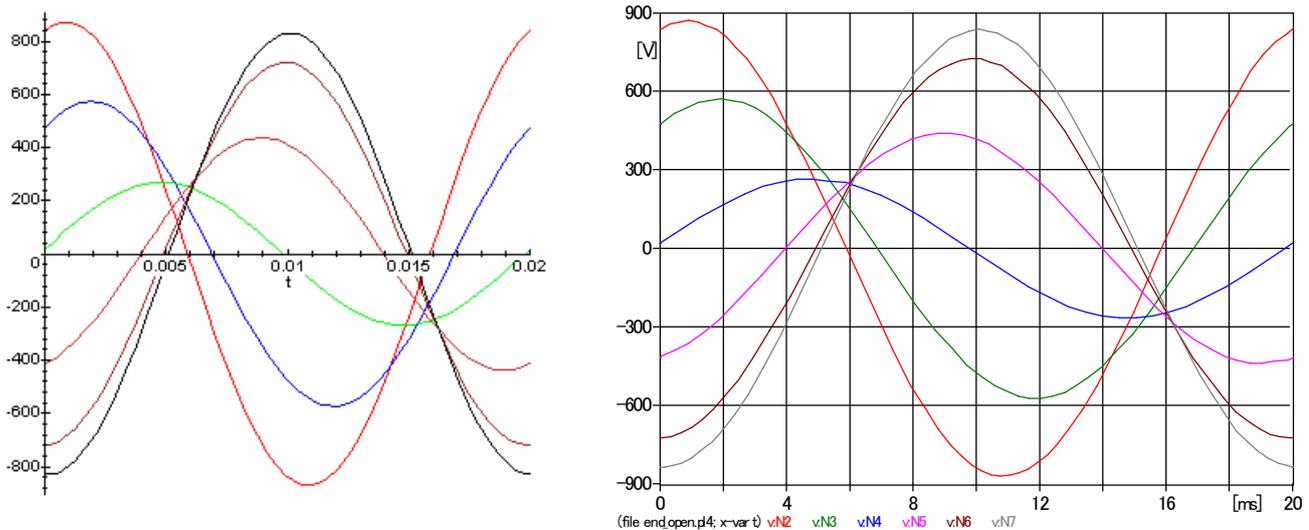


図 11.4-3 終端開放の分布定数回路の各点の電圧の時間変化

任意の距離  $x$  における電流の式は(10.8)式に(11.52)及び(11.56)の任意定数の関係を入れて整理すれば次の(11.59)の通りに得られます。

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\dot{Y}_0 \cdot \{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \} = -\dot{Y}_0 \cdot \left\{ \dot{E} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \frac{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \cdot \dot{E} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \right\} = \\ \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{ \{ -\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \} }{ \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) } &= \dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{ \sinh \dot{\Gamma} (\ell - x) }{ \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) } \quad (11.59) \end{aligned}$$

11.2 項の線路を終端開放とした時の線路長に沿った  $t=0$  で  $E_m = 1000 (V)$  の瞬間の電流分布の式は 11.2 項の(11.23)式～(11.34)式と同様の考え方で式を変形し次式が得られます。

$$\begin{aligned} i_x &= -0.8020632535 \cdot \exp(-0.2106951032E-6 \cdot x + 0.6320853096) \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t + 3.364040233 - 0.1068183101E-5 \cdot x) \\ &+ 0.8020632535 \cdot \exp(0.2106951032E-6 \cdot x - 0.6320853096) \cdot \cos(-100 \cdot \pi \cdot t - 0.1068183101E-5 \cdot x + 3.045058373) \end{aligned} \quad (11.60)$$

この式で表される電流波形は次図のようになります。

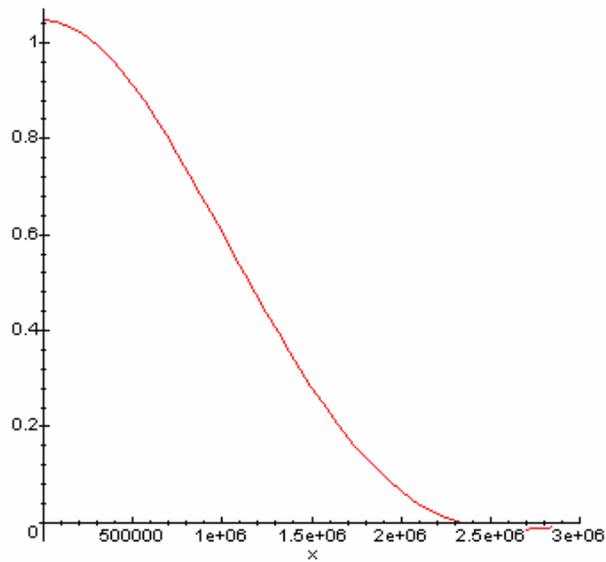


図 11.4-4 終端開放の分布定数回路の電流分布

終端開放にかかわらず図 11.4-4 のように電流が流れる理由は次の通りです。  
 集中定数回路であれば終端開放ですから電流は流れません。しかし分布定数回路であると電源から対地キャパシタンス、コンダクタンス(この例ではコンダクタンスは無いとしています)を通して流れるものです。

(11.60)式に距離 0.5E6, 1.0E6, 1.5E6, 2.0E6, 2.5E6, 3E6 (m)を入れこの時の各点の電流値を計算すると次のようになります。Simulation の欄は ATP によるシミュレーション結果です。

距離	電流値	Simulation
0	1.0	1.0
0.5E6	0.9	0.9
1.0E6	0.6	0.6
1.5E6	0.3	0.3
2.0E6	0.06	0.06
2.5E6	-0.01	-0.01
3.0E6	0	0

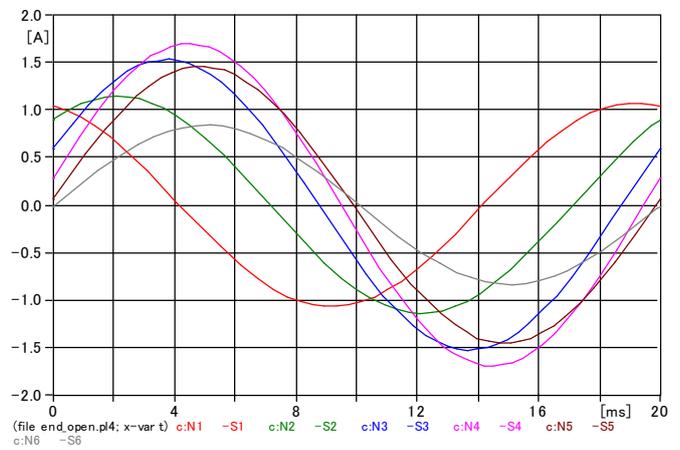
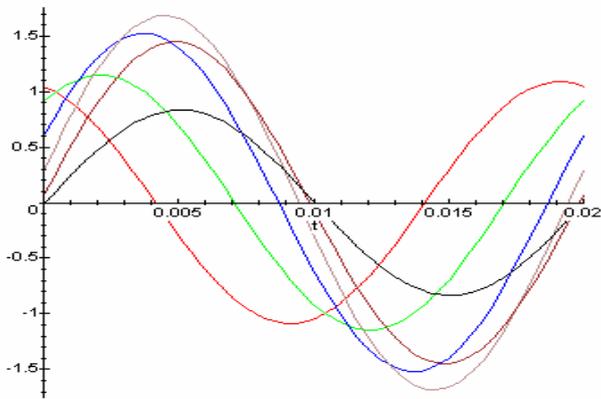


図 11.4-5 0.5E6, 1.0E6, 1.5E6, 2.0E6, 2.5E6, 3E6 (m)における電流の時間変化

次に始端から見たインピーダンスがどのような式になるか見てみましょう。  
 始端から見たインピーダンスは複素数になるので、インピーダンスの大きさは複素数の絶対値  $|\dot{Z}_{\ell=0}|$  を取り、プロットします。

$$|\dot{Z}_{\ell=0}| = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{I}_{\ell=0}} \right| = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{Y}_0 \cdot \dot{E} \cdot \frac{\sinh \dot{\Gamma}(\ell-0)}{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}} \right| = \left| \frac{1}{\dot{Y}_0} \cdot \frac{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \right| = \boxed{|\dot{Z}_0 \cdot \coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)|} \quad (11.61)$$

となります。ここで  $\coth(\dot{\Gamma} \cdot \ell)$  は  $\ell \rightarrow \infty$  で 1 に収束するので下図の如く距離が長くなると  $\dot{Z}_0$  に収束します。

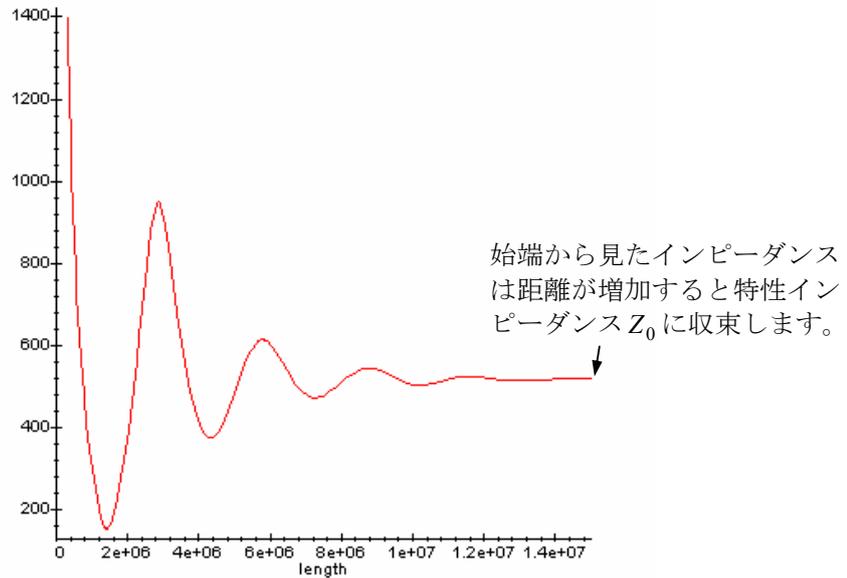


図 11.4-6 終端開放分布定数回路の始端から見たインピーダンスと線路長の関係

### 11.5 終端に任意のインピーダンスが接続された有限長分布定数回路

この項はインピーダンス整合にも関連するものです。

下図の回路で以下に述べる条件の時、任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求める式を求めてみましょう。

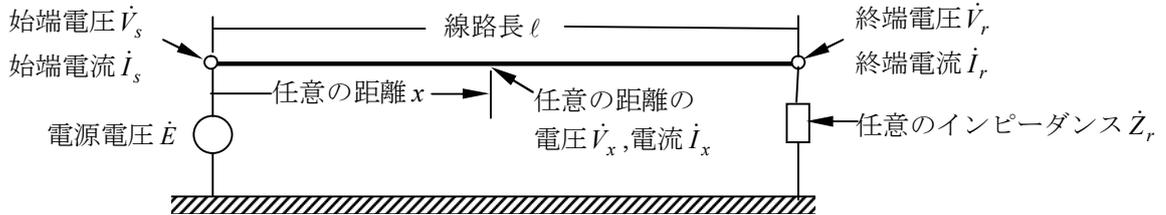


図 11.5-1 検討対象の終端が任意のインピーダンスを介して接地された分布定数回路

#### 1) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と始端電流 $\dot{I}_s$ が与えられる場合

まず、与えられた始端での境界条件から(10.7)、(10.8)式の電圧と電流の一般解の任意定数  $\dot{C}, \dot{D}$  を決定しましょう。

図 29 に示すように  $x=0$  の始端での電圧は  $\dot{V}_s$  と与えられているので、この条件を(10.7)式に入れます。  $\sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 0$ 、 $\cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 1$  になりますから

$$\dot{V}_s = \dot{E} = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = \dot{C} \quad (11.62) \quad \text{が得られます。}$$

電流については始端条件を電流の一般解(10.8)式に入れて、

$$\dot{I}_s = -\dot{Y}_0 \cdot \left\{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) \right\} = -\dot{Y}_0 \cdot \dot{D} \quad (11.63) \quad \text{が得られます。}$$

(11.63)式を変形して

$$\dot{D} = -\frac{\dot{I}_s}{\dot{Y}_0} = -\dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_s \quad (11.64) \quad \text{となります。}$$

よって、任意定数  $\dot{C}, \dot{D}$  に関する(11.62)、(11.64)式を電圧と電流の一般解(10.7)(10.8)式に代入して、始端からの任意の距離  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$  と電流  $\dot{I}_x$  を次のように始端電圧  $\dot{V}_s$  と始端電流  $\dot{I}_s$  から得ることができます。

$$\dot{V}_x = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) = \dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (11.65)$$

$$\dot{I}_x = -\dot{Y}_0 \cdot \left\{ \dot{V}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \frac{1}{\dot{Y}_0} \cdot \dot{I}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \right\} = -\dot{Y}_0 \cdot \dot{V}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{I}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) \quad (11.66)$$

この(11.65)(11.66)式で  $x=l$  とすれば、 $\dot{V}_x$  は終端電圧  $\dot{V}_r$  となり、 $\dot{I}_x$  は終端電流  $\dot{I}_r$  となって次のように端電圧  $\dot{V}_r$  と終端電流  $\dot{I}_r$  を始端電圧  $\dot{V}_s$  と始端電流  $\dot{I}_s$  から求めることができます。

$$\dot{V}_r = \dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) - \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \quad (11.67)$$

$$\dot{I}_r = -\dot{Y}_0 \cdot \dot{V}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{I}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \quad (11.68)$$

2) 終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端電流  $\dot{I}_r$  が与えられる場合

(10.7)、(10.8)式の電圧と電流の一般解より、 $x = \ell$  では電圧は  $\dot{V} \rightarrow \dot{V}_r$  となり電流は  $\dot{I} \rightarrow \dot{I}_r$  となるので電圧と電流の一般解は次のように表せます。

$$\dot{V}_r = \dot{C} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{D} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.69)$$

$$\dot{I}_r = -\dot{Y}_0 \cdot \{ \dot{C} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{D} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \} \quad (11.70)$$

これらの式中の任意定数  $\dot{D}$  を最初に求めましょう

(11.70)式の特性アドミッタンス  $\dot{Y}_0$  を特性インピーダンス  $\dot{Z}_0$  で表し変形して次式を得ます。

$$-Z_0 \cdot \dot{I}_r = \dot{C} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{D} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.71)$$

(11.69)式を変形して

$$\dot{C} = \frac{\dot{V}_r - \dot{D} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell}{\cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \quad (11.72)$$

(11.72)式を(11.71)式に入れて

$$\frac{\dot{V}_r - \dot{D} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell}{\cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{D} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell = -Z_0 \cdot \dot{I}_r \quad (11.73)$$

(11.73)式の分母を払って整理し、

$$\dot{D} \cdot (\cosh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell - \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell) = -Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell - \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.74)$$

ここで  $\cosh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell - \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell = 1$  なので(11.74)式は次式となり、任意定数  $\dot{D}$  が得られます。

$$\dot{D} = -Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell - \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.75)$$

次に任意定数  $\dot{C}$  を求めましょう。

(11.75)式を(11.69)式に入れて

$$\dot{V}_r = \dot{C} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell + (-Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell - \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.76)$$

(11.76)式を変形整理して次式を得ます。

$$\dot{C} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell = \dot{V}_r (1 + \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell) + Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.77)$$

(11.77)式中の

$$1 + \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell = \cosh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell - \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell + \sinh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell = \cosh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.78) \text{ ですから}$$

(11.77)式は

$$\dot{C} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell = \dot{V}_r \cdot \cosh^2 \dot{\Gamma} \cdot \ell + Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.79) \text{ となります。}$$

(11.79)式を変形して

$$\dot{C} = \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell + Z_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \quad (11.80) \text{ と任意定}$$

数  $\dot{C}$  が求まります。

求まった任意定数(11.75)式の  $\dot{D}$  と(11.80)式の  $\dot{C}$  の式を任意の距離  $x$  における電圧の一般解(11.7)に入れて展開すると任意の位置  $x$  での電圧  $\dot{V}_x$  は終端電圧  $\dot{V}_r$  と終端電流  $\dot{I}_r$  を使って次のように表せます。尚、(10.7)式の左辺の  $V$  は任意の距離  $x$  における電圧という意味合いから  $V_x$  に表示を改めています。

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x + \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x - \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x - \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x \\ &= \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} (\ell - x) + \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} (\ell - x) \end{aligned} \quad (11.81)$$

尚、最後の式にするために双曲線関数の加法定理

$$\cosh(A - B) = \cosh(A) \cdot \cosh(B) - \sinh A \cdot \sinh B,$$

$$\sinh(A - B) = \sinh A \cdot \cosh B - \cosh A \cdot \sinh B$$

を使っています。

同様に電流についても求まった任意定数(11.75)式の  $\dot{D}$  と(11.80)式の  $\dot{C}$  の式を電流の一般解

(10.8)式に入れて展開して双曲線関数の加法定理を使って次式を得ます。  
 尚、(10.8)式の左辺の  $I$  は任意の距離  $x$  における電流という意味合いから  $I_x$  に表示を改めていま  
 す。

$$\dot{I}_x = \dot{Y}_0 \left\{ \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) + \dot{I}_r \cdot \dot{Z}_0 \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) \right\} \quad (11.82)$$

ここで  $\dot{Y}_0 \cdot \dot{Z}_0 = 1$  ですから(11.82)式は次のように終端電圧  $\dot{V}_r$  と終端電流  $\dot{I}_r$  を使って次のように  
 表せます。

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{V}_r}{\dot{Z}_0} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) + \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) \quad (11.83)$$

(11.81)(11.83)式で  $x=0$  の時は  $\dot{V}_x \rightarrow \dot{V}_s$ 、 $\dot{I}_x \rightarrow \dot{I}_s$  となり、これらの  $\dot{V}_s$ 、 $\dot{I}_s$  は  
 (11.81)と(11.83)の  $x$  に  $x=0$  を代入すれば、始端電圧  $\dot{V}_s$ 、始端電流  $\dot{I}_s$  は次のように  
 終端電圧  $\dot{V}_r$  と終端電流  $\dot{I}_r$  を使って求めることができます。

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_s &= \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \\ \dot{I}_s &= \frac{\dot{V}_r}{\dot{Z}_0} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell + \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \end{aligned} \right\} \quad (11.84)$$

尚、ここで(11.84)式について次のように  $\dot{A} \sim \dot{D}$  係数を定義すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell), & \dot{B} &= \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \\ \dot{C} &= \dot{Y}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) & \dot{D} &= \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) = \dot{A} \end{aligned} \right\} \quad (11.85)$$

これらの定義した係数を使うと、 $\dot{V}_s, \dot{I}_s$  と  $\dot{V}_r, \dot{I}_r$  の関係式は次式の行列の形で表わすことができ  
 るので、(11.84)式の係数が図 11.5-2 に示す 2 端子対回路の 4 端子定数に相当することがわかり  
 ます。

$$\begin{vmatrix} \dot{V}_s \\ \dot{I}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{V}_r \\ \dot{I}_r \end{vmatrix} \quad (11.86)$$

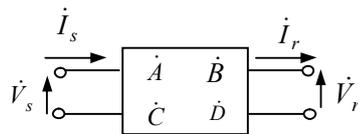


図 11.5-2 2 端子対回路

### 3) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端電圧 $\dot{V}_r$ が与えられる場合

最初にこのケースの時の任意定数を決定します。

(10.7)式の電圧の一般解の式で  $x=0$  の時を考えると、この時電圧の一般解は次のようになります。

$$\dot{V}_s = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = \dot{C} \quad (11.87)$$

また(10.7)式の電圧の一般解の式で  $x=\ell$  の時を考えると、この時の電圧の一般解は次のようにな  
 ります。

$$\dot{V}_r = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) = \dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \quad (11.88)$$

(11.88)式を変形して

$$\dot{D} = \frac{\dot{V}_r - \dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \quad (11.89)$$

任意定数が(11.87)(11.89)の如く求めたのでこれらを(10.7)式の電圧の一般解に入れて整理して始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端電圧 $\dot{V}_r$ を使った任意の位置 $x$ における電圧の式が得られます。

(10.7)式の左辺の $V$ は次式では任意の距離 $x$ における電圧という意味合をはっきりと明示するため $V_x$ に表示を改めています。

$$\dot{V}_x = \dot{V}_s \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x + \frac{\dot{V}_r - \dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x = \frac{\dot{V}_s \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \dot{V}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \quad (11.90)$$

電流についても同様に(11.87)(11.89)式の結果を(10.8)式の電流の一般解に代入して始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端電圧 $\dot{V}_r$ を使った任意の位置 $x$ における電流の式が得られます。

(10.8)式の左辺の $I$ は次式では任意の距離 $x$ における電流という意味合をはっきりと明示するため $I_x$ に表示を改めています。

$$\dot{i}_x = \frac{1}{\dot{Z}_0} \left\{ \frac{\dot{V}_s \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x - \dot{V}_s \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x - \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \right\} = \frac{1}{\dot{Z}_0} \left\{ \frac{\dot{V}_s \cdot \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) - \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \right\} \quad (11.91)$$

#### 4) 始端電流電圧 $\dot{i}_s$ と終端電流 $\dot{i}_r$ が与えられる場合

電流の一般解(10.8)式で $x=0$ の時を考えると $\dot{i} \rightarrow \dot{i}_s$ となり、電流の一般解の式は次のようになります。

$$\dot{i}_s = -\frac{1}{\dot{Z}_0} \cdot \left\{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) \right\} \quad (11.92)$$

$\sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 0$ 、 $\cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 1$ ですから(11.92)式は

$$\dot{D} = -\dot{i}_s \cdot \dot{Z}_0 \quad (11.93)$$

(11.93)式を(10.8)式に入れて $x=\ell$ の場合を考えます。この時電流は $\dot{i} \rightarrow \dot{i}_r$ となり次式の形になります。

$$\dot{i}_r = -\frac{1}{\dot{Z}_0} \cdot \left\{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + (-\dot{i}_s \cdot \dot{Z}_0) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \right\} \quad (11.94)$$

(11.94)式を変形して任意定数 $\dot{C}$ を求めます。

$$\dot{C} = \frac{\dot{i}_s \cdot \dot{Z}_0 \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot \ell - \dot{Z}_0 \cdot \dot{i}_r}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \quad (11.95)$$

決定された任意定数をそれぞれ(10.7)式の電圧の式と(10.8)式の電流の一般解に入れて任意の位置 $x$ における電圧 $\dot{V}_x$ と電流 $\dot{i}_x$ の式は次のようになります。(10.7)式、(10.8)式の左辺の $V, I$ は距離 $x$ における電圧、電流であることを明示するために $V_x, I_x$ に変更しているのは前項と同じです。途中の式の変形仮定を少し省略しています。

$$\dot{V}_x = \frac{\dot{i}_s \cdot \dot{Z}_0 \cdot \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) - \dot{Z}_0 \cdot \dot{i}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot x}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \quad (11.96)$$

$$\dot{i}_x = \frac{\dot{i}_s \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \dot{i}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot x}{\sinh \dot{\Gamma} \cdot \ell} \quad (11.97)$$

### 5) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合

さていろいろなケースの場合の電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求める式を誘導して来ましたが、折角終端にインピーダンスを接続したのですから、始端電圧とこの終端インピーダンス値から任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求める式を誘導しておきましょう。

電圧の一般解に始端、つまり  $x=0$  で  $\dot{V}_s$  の条件を入れると次式になります。

$$\dot{V}_s = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) \quad (11.98)$$

$$\sinh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 0, \quad \cosh(\dot{\Gamma} \cdot 0) = 1 \quad \text{ですから(11.98)式は(11.99)になります。}$$

$$\dot{C} = \dot{V}_s \quad (11.99)$$

一方、終端インピーダンス値は次式の関係となります。

$$\dot{Z}_r = \frac{\dot{V}_r}{\dot{I}_r} \quad (11.100)$$

この  $\dot{V}_r$  と  $\dot{I}_r$  は電圧の一般解、電流の一般解の  $x$  を  $x=\ell$  とした次の式です。

$$\dot{V}_r = \dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \quad (11.101)$$

$$\dot{I}_r = -\dot{Y}_0 \cdot \{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \} \quad (11.102)$$

よって(11.101)(11.102)式を使って(11.100)の  $\dot{Z}_r$  を表すと次式になります。

$$\dot{Z}_r = \frac{\dot{V}_r}{\dot{I}_r} = \frac{\dot{C} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{-\dot{Y}_0 \cdot \{ \dot{C} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \}} \quad (11.103)$$

(11.103)式に(11.99)式の関係を入れ、

$$\dot{Z}_r = \frac{\dot{V}_r}{\dot{I}_r} = \frac{\dot{V}_s \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)}{-\dot{Y}_0 \cdot \{ \dot{V}_s \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{D} \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \}} \quad (11.104)$$

(11.104)式を変形して  $\dot{D}$  は次の式として求まります。

$$\dot{D} = \frac{-\dot{V}_s \cdot (\dot{Z}_0 \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_r \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell))}{\dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \quad (11.105)$$

(11.99)式(11.105)式で求めた  $\dot{C}, \dot{D}$  の式を(10.7)式、(10.8)式の電圧、電流の一般解に入れて整理すると任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$  と電流  $\dot{I}_x$  の式は(106)式のように求められます。(10.7)式、(10.8)式の左辺の  $V, I$  は距離  $x$  における電圧、電流であることを明示するために  $V_x, I_x$  に変更しているのは前項と同じです。

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{\dot{V}_s \{ \dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) - \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) - \dot{Z}_r \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \}}{\dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \\ &= \frac{\dot{V}_s \{ \dot{Z}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) \}}{\dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \quad (11.106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_x &= Y_0 \cdot V_s \left\{ \frac{-\dot{Z}_r \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) - \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot x) \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x) + \dot{Z}_r \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot x)}{\dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \right\} \\ &= Y_0 \cdot V_s \frac{\{ \dot{Z}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \dot{Z}_0 \cdot \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) \}}{\dot{Z}_r \cdot \cosh(\dot{\Gamma} \cdot \ell) + \dot{Z}_0 \cdot \sinh(\dot{\Gamma} \cdot \ell)} \quad (11.107) \end{aligned}$$

### 6) 終端電圧 $\dot{V}_r$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合

次に任意の位置  $x$  における電圧  $V_x$  の式を終端のインピーダンス  $\dot{Z}_r$ 、終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端電流  $\dot{I}_r$  を使って表す式を導きましょう。

考え方は次の通りです。

(11.81)式で任意の位置  $x$  の電圧  $V_x$  を終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端電流  $\dot{I}_r$  を使って求める式を導出しています。この式を利用します。 $\dot{I}_r = \frac{\dot{V}_r}{\dot{Z}_r}$  なのでこの関係を(11.62)式の  $\dot{I}_r$  に代入すれば直ちに任意の位置  $x$  の電圧  $V_x$  を終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端インピーダンス  $\dot{Z}_r$  を使った式を導けます。

$$\dot{V}_x = \dot{V}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \dot{Z}_0 \cdot \dot{I}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) = \dot{V}_r \cdot \left\{ \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_r} \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) \right\} \quad (11.108)$$

電流についても同様に(11.83)式で任意の位置  $x$  の電流  $\dot{I}_x$  を終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端電流  $\dot{I}_r$  を使って求める式を導出しています。この式を利用します。 $\dot{I}_r = \frac{\dot{V}_r}{\dot{Z}_r}$  なのでこの関係を(11.83)式の  $\dot{I}_r$  に代入すれば直ちに次式の如く、任意の位置  $x$  の電流  $\dot{I}_x$  を終端電圧  $\dot{V}_r$ 、終端インピーダンス  $\dot{Z}_r$  を使って表す式を導けます。

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{V}_r}{\dot{Z}_0} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) + \dot{I}_r \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) = \dot{V}_r \cdot \left\{ \frac{1}{\dot{Z}_0} \cdot \sinh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) + \frac{1}{\dot{Z}_r} \cdot \cosh \dot{\Gamma} \cdot (\ell - x) \right\} \quad (11.109)$$

### 7) 数式で表された任意の位置 $x$ における電圧 $\dot{V}_x$ 、電流 $\dot{I}_x$ のプロット例

前項でいろいろなケースの電圧と電流の式を導出しました。

これからはこれらの式を実際のケースに適用して具体的に検討することが肝要でしょう。

ここでは 11.2 項の分布定数回路を使い、終端には一例として  $\dot{Z}_r = 10 + j 7.5 (\Omega)$  のインピーダンスを接続する場合と線路の特性インピーダンスに等しい  $\dot{Z}_r = 507.6156063 - j 100.1252704$  を接続する例で、位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  のプロットをしてみましょう。

プロットは上述の 5) のケース、「始端電圧  $\dot{V}_s$  と終端インピーダンス  $\dot{Z}_r$  が与えられる場合」で行います。

検討対象の線路定数を再掲すると次の通りです。

$$\dot{\Gamma} = 0.2106951032E - 6 + j 0.1068183101E - 5$$

$$\ell = 3E6 \quad (\text{m})$$

$$\dot{Z}_0 = \frac{1}{\dot{Y}_0} = 507.6156063 - j 100.1252704 \quad (\Omega)$$

#### 7-1) 始端電圧 $\dot{V}_s$ と終端インピーダンス $\dot{Z}_r$ が与えられる場合

始端電圧は 1000V Peak の瞬時を取り、この時の分布定数線路に沿った電圧の大きさの分布をプロットしてみましょう。

(11.106)式に上記定数を入れます。始端電圧は 1000V Peak の瞬時としていますから、得られた複素電圧の内、余弦波形となる複素電圧の実数部を取ってプロットすれば良く、下図の結果になります。

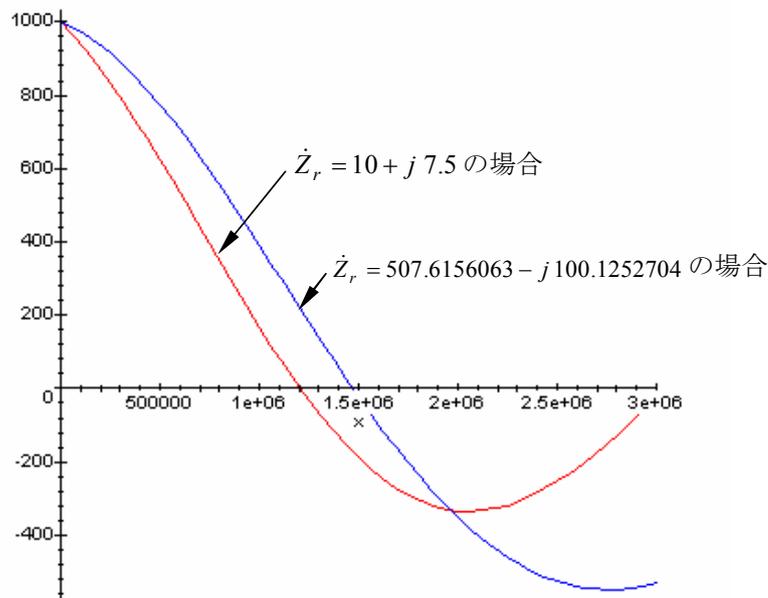


図 11.5-3 接地インピーダンス値を変えた時の線路に沿った電圧分布状態の変化

図 11.5-3 の距離と実数部電圧値の関係の一部分を示すと次のようになります。

電源からの距離	$\dot{Z}_r = 10 + j 7.5$ 時		$\dot{Z}_r = 507.6156063 - j 100.1252704$ 時	
	数式計算結果	ATP 計算結果	数式計算結果	ATP 計算結果
0.5E6	624	624	775	777
1E6	168	167	390	394
1.5E6	-189	-190	-23	-20
2E6	-334	-335	-352	-351
2.5E6	-253	-254	-526	-529
3E6	-26	-27	-530	-537

次に数式から得られる電流分布を図示すると次のようになります。

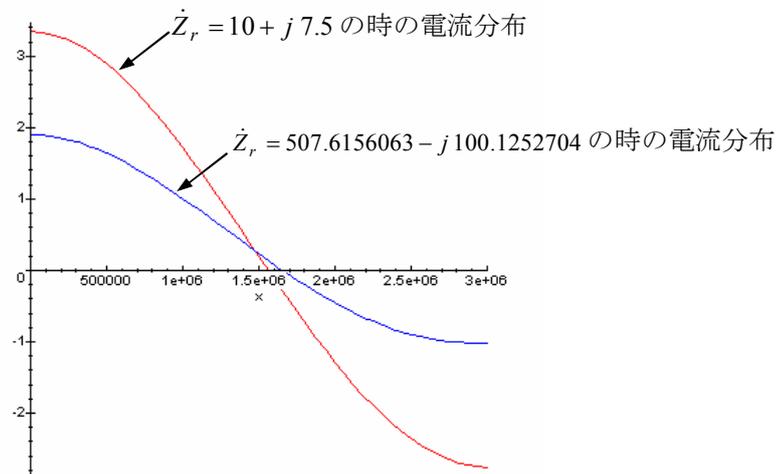


図 11.5-4 始端電圧  $\dot{V}_s$  と終端インピーダンス  $\dot{Z}_r$  が与えられ回路の電流分布の様子

各距離における電圧値の計算結果は次の通りです。

電源からの距離	$\dot{Z}_r = 10 + j 7.5$ 時		$\dot{Z}_r = 507.6156063 - j 100.1252704$ 時	
	数式計算結果	ATP 計算結果	数式計算結果	ATP 計算結果
0.5E6	2.9	2.9	1.6	1.6
1E6	1.7	1.7	1	1
1.5E6	0.2	0.2	0.2	0.2
2E6	-1.3	-1.3	-0.5	-0.5
2.5E6	-2.4	-2.4	-0.9	-0.9
3E6	-2.8	-2.8	-1	-1

8) 位置角、負荷角を用いて任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求める

終端が任意のインピーダンスで接地されている分布定数回路ではインピーダンス位置角、負荷角を用いて任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求めることができます。

位置角、負荷角がどのようなものであるかから始めて、これらの任意の位置  $x$  における電圧  $\dot{V}_x$ 、電流  $\dot{I}_x$  を求めてみましょう。

最初に(11.88)式中出现来た負荷インピーダンス  $\dot{Z}_r$  と特性インピーダンス  $\dot{Z}_0$  の比  $\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_r}$  を  $\tanh(\theta_r)$  を使って表すことを検討します。

一般的の線路では  $\dot{Z}_0$ 、 $\dot{Z}_r$  の大小関係は  $|\dot{Z}_0| > |\dot{Z}_r|$  の場合が多く、この場合は、 $\left| \frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} \right|$  は  $0 \leq \left| \frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} \right| < 1$  の範囲になります。

一方  $\tanh(\theta_r)$  の関数は  $0 \leq \theta_r$  のハッチングで示した領域では図 11.5-5 の  $\tanh(\theta_r)$  の曲線となり、 $\tanh(\theta_r)$  の取り得る範囲は  $0 \leq \tanh(\theta_r) < 1$  となります。

したがって  $0 \leq \left| \frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} \right| < 1$  であれば  $\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} = \tanh(\theta_r)$  (11.110) と表すことができます。

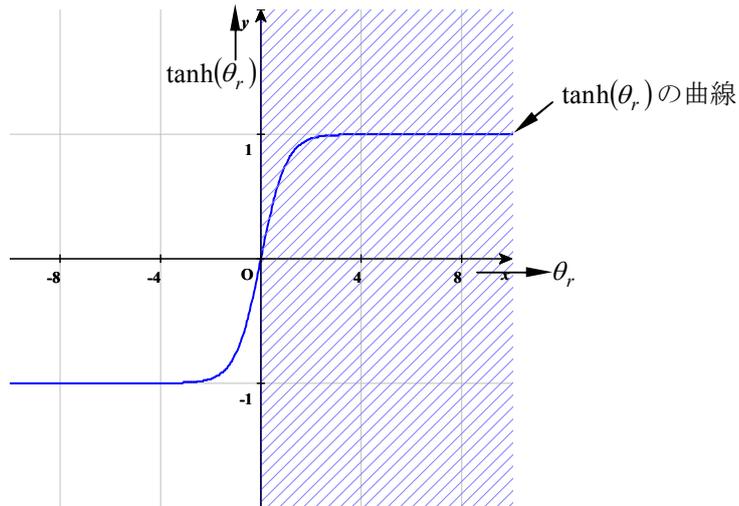


図 11.5-5  $\tanh(\theta_r)$  の図。  $0 \leq \theta_r$

ところで  $\theta_r$  は  $\theta_r = \arctanh\left(\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0}\right)$  から一般に複素数になるので  $\hat{\theta}_r$  と表しましょう。

したがって  $\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} = \tanh(\hat{\theta}_r)$  (11.111) となります。

また  $|\dot{Z}_0| < |\dot{Z}_r|$  のケースでは  $\frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|}$  は  $1 < \frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|}$  となりますね。一方  $\coth(\theta_r)$  の関数は  $0 \leq \theta_r$  のハ

ッチングの範囲で図 11.5-6 の部分のようになり、 $\coth(\theta_r)$  は無限大から減少して行き 1 に漸近します。つまり  $1 < \coth(\theta_r)$  になります。

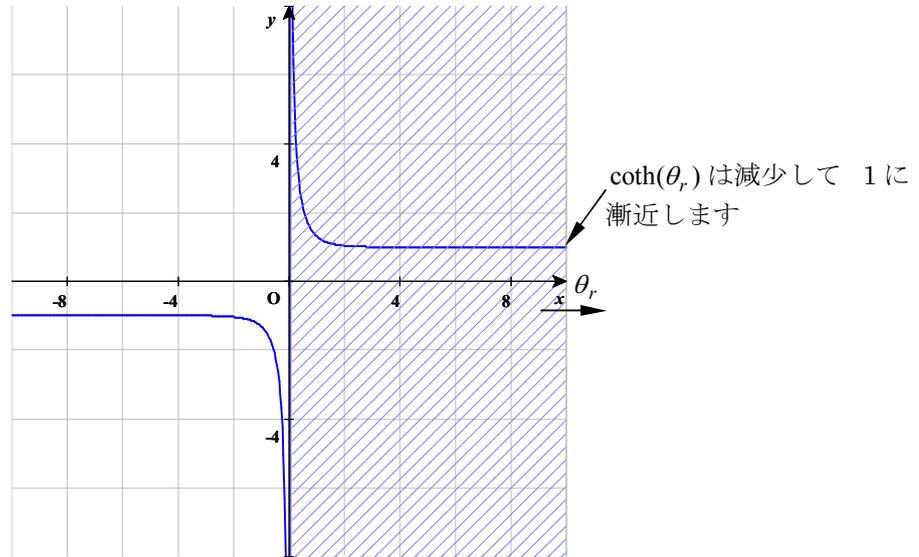


図 11.5-6  $\coth(\theta_r)$  の図。  $\theta_r > 0$

したがって

$$\frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|} = \coth(\theta_r) \quad (11.112) \text{ と表すことができますね。}$$

(11.75)式のところで述べたのと同じ理由で、 $\theta_r$  は  $\theta_r = \operatorname{arccoth}\left(\frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|}\right)$  から一般に複素数になるので  $\dot{\theta}_r$  と表しましょう。つまり

$$\frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|} = \coth(\dot{\theta}_r) \quad (11.113)$$

(11.111),(11.113)式で使われている角度  $\dot{\theta}_r$  はこれらの二つの式から明らかなように終端の負荷インピーダンス  $\dot{Z}_r$  に関連した角度ですね。この意味で  $\dot{\theta}_r$  のことを**負荷角**と呼びます。

(11.111),(11.113)式を基に  $0 < \frac{|\dot{Z}_r|}{|\dot{Z}_0|} < 1$  のケースでこの線路の任意の位置  $x_r$  の電圧、電流がどのように表されるか検討してみましょう。

電源から任意の P 点までの距離  $x$  より先の終端までの長さを  $x_r$  とすると(下図を参照願います)

$$x_r = \ell - x \quad (11.114) \text{ となります。}$$

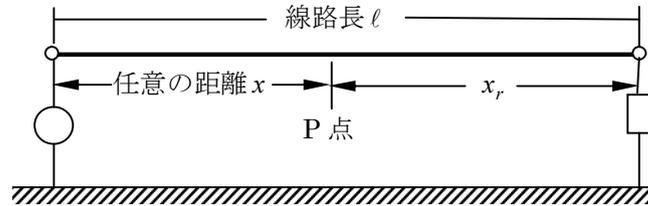


図 11.5-7  $x_r$  の定義

(11.111)式の  $\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} = \tanh(\dot{\theta}_r)$  より  $\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_r} = \frac{\cosh(\dot{\theta}_r)}{\sinh(\dot{\theta}_r)}$  (11.115) です。

と(11.114)、(11.115)式を(11.108)式に入れると次式になります。

$$\dot{V}_x = \dot{V}_r \cdot \left\{ \cosh \dot{\Gamma}(x_r) + \frac{\cosh(\dot{\theta}_r)}{\sinh(\dot{\theta}_r)} \cdot \sinh \dot{\Gamma}(x_r) \right\} = \dot{V}_r \cdot \left\{ \frac{\cosh \dot{\Gamma}(x_r) \cdot \sinh(\dot{\theta}_r) + \cosh(\dot{\theta}_r) \cdot \sinh \dot{\Gamma}(x_r)}{\sinh(\dot{\theta}_r)} \right\} = \dot{V}_r \cdot \left\{ \frac{\sinh(\dot{\Gamma} \cdot x_r + \dot{\theta}_r)}{\sinh(\dot{\theta}_r)} \right\} \quad (11.116)$$

電流についての(11.83)式に(11.114)式、 $\dot{Y}_0 = \frac{1}{\dot{Z}_0}$ 、 $\dot{V}_r = \dot{I}_r \cdot \dot{Z}_r$  の関係と

$$\frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} = \frac{\sinh(\dot{\theta}_r)}{\cosh(\dot{\theta}_r)} \quad (11.117) \quad \text{の関係を入れて、双曲線関数の加法定理で整理し}$$

て次式が得られます。

$$\dot{I}_x = \dot{I}_r \cdot \left\{ \frac{1}{\dot{Z}_0} \cdot \dot{Z}_r \cdot \sinh \dot{\Gamma}(\ell - x) + \cosh \dot{\Gamma}(\ell - x) \right\} = \dot{I}_r \cdot \left\{ \frac{\dot{Z}_r}{\dot{Z}_0} \cdot \sinh \dot{\Gamma}(x_r) + \cosh \dot{\Gamma}(x_r) \right\} = \dot{I}_r \cdot \left\{ \frac{\sinh(\dot{\theta}_r)}{\cosh(\dot{\theta}_r)} \cdot \sinh \dot{\Gamma}(x_r) + \cosh \dot{\Gamma}(x_r) \right\} = \dot{I}_r \cdot \left\{ \frac{\cosh(\dot{\Gamma} \cdot x_r + \dot{\theta}_r)}{\cosh(\dot{\theta}_r)} \right\} \quad (11.118)$$

更に(11.116),(11.118)式は  $\dot{\Gamma} \cdot x_r + \dot{\theta}_r = \dot{\theta}_p$  と定義すると次のように表せます。

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_x &= \dot{V}_r \cdot \frac{\sinh(\dot{\theta}_p)}{\sinh(\dot{\theta}_r)} \\ \dot{I}_x &= \dot{I}_r \cdot \frac{\cosh(\dot{\theta}_p)}{\cosh(\dot{\theta}_r)} \end{aligned} \right\} \quad (11.119)$$

$\dot{\Gamma} \cdot x_r + \dot{\theta}_r = \dot{\theta}_p$  として定義した  $\dot{\theta}_p$  を位置角と呼びます。 $\dot{\theta}_p$  は位置  $x_r$  に関連した角度だからですね。 $\dot{\Gamma}$ 、 $\dot{\theta}_r$  とともに一般に複素数なので  $\dot{\theta}_p$  も複素数になります。

位置角の応用として次の応用があげられます。

線路上に P 点のほかに任意の  $x_{r-Q}$  の Q 点を取り上げ、この Q 点の電圧を位置角を使って簡単に

求めることができます。

Q点の位置角を

$$\theta_{p-Q} = \dot{I} \cdot x_{r-Q} + \dot{\theta}_r \quad (11.120) \text{ としましょう。}$$

すると  $x_{r-Q}$  点で(11.119)式より

$$\dot{V}_{x-Q} = \dot{V}_r \cdot \frac{\sinh(\dot{\theta}_{p-Q})}{\sinh(\dot{\theta}_r)} \quad (11.121) \text{ ですから(11.119)式と(11.121)式の比を}$$

取れば

$$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_{x-Q}} = \frac{\sinh(\dot{\theta}_p)}{\sinh(\dot{\theta}_{p-Q})} \quad (11.122) \text{ となり、位置角の比で } \dot{V}_{x-Q} \text{ を求めるこ}$$

とができます。Q点の電流についても(11.122)式と同様に位置角の比から求めることができます。

## 12. 進行波の反射、透過現象について

### 12.1 進行波の反射係数、透過係数

この現象の基礎となる式は第 5.1 項の一般解(5.10)式と(5.11)式です。

これらの式を再掲すると次の通りです。

$$v = f_1(x - c \cdot t) + f_2(x + c \cdot t) \quad (5.10)$$

$$i = Y_0 \{f_1(x - c \cdot t) - f_2(x + c \cdot t)\} \quad (5.11)$$

次の図で電圧、電流の反射、透過を考察して行きます。

電流の正の方向は線路 1 から P 点に向かう向きとします。

記号の意味は次のとおりです。

$ef_1$	電圧の前進波
$eb_1$	電圧の反射波
$ef_2$	電圧の透過波
$if_1$	電流の前進波
$-ib_1$	電流の反射波(電流前進波と方向が逆向きなのでマイナス符号がつきます)
$if_2$	電流の透過波

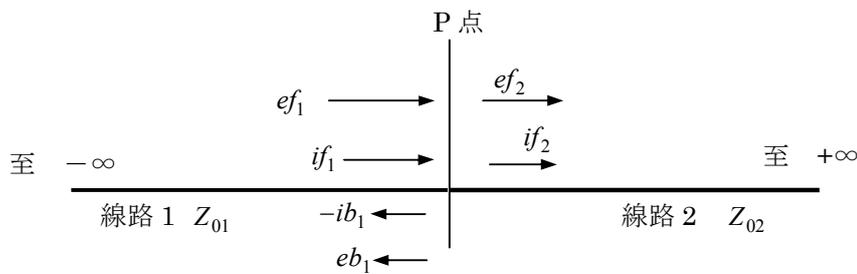


図 12-1 反射波、反射波、透過波

電圧の反射係数を  $k_{refv}$ 、電圧透過係数を  $k_{pv}$ 、電流の反射係数を  $k_{refc}$ 、電流の透過係数を  $k_{pc}$  とすると反射波、透過波は入射波にこれらの係数を乗じて次のようになります。

$$\begin{aligned} eb_1 &= k_{refv} \cdot ef_1 \\ -ib_1 &= k_{refc} \cdot if_1 \\ ef_2 &= k_{pv} \cdot ef_1 \\ if_2 &= k_{pc} \cdot if_1 \end{aligned} \quad (12.1)$$

となります。

本項では(12.1)式の成り立つ説明と電圧の反射係数  $k_{refv}$ 、透過係数  $k_{pv}$ 、電流の反射係数  $k_{refc}$ 、透過係数  $k_{pc}$  が線路の特性インピーダンスでどのように表すことができるのか考察して行きます。

#### 1) 電圧の反射係数 $k_{refv}$

正反射(同極性反射)、負反射(反射波の極性が入射波と逆になる反射)は反射係数で決まるので、そのことは気にしないで推論して行きます。

(5.10)式の  $f_1(x - c \cdot t)$  は前進波でこれを  $ef_1$  とします。また  $f_2(x + c \cdot t)$  の後進波を  $eb_1$  とします。すると線路 1 の P 点の電圧は(5.10)式より

$$v = ef_1 + eb_1 \quad (12.2)$$

この電圧は線路 2 の P 点電圧に等しいので次式が成り立ちます。

$$ef_1 + eb_1 = ef_2 \quad (12.3)$$

線路 1 側の P 点の電流は(5.11)式から

$$i = Y_{01}(ef_1 - eb_1) = \frac{ef_1 - eb_1}{Z_{01}} \quad (12.4)$$

$Y_{01}$  は線路 1 の特性アドミッタンスで、 $Y_{01} = \frac{1}{Z_{01}}$  です。 $Z_{01}$  は線路 1 の特性インピーダンスです。

(12.4)式は電流前進波  $\frac{ef_1}{Z_{01}}$  から電流反射波  $\frac{eb_1}{Z_{01}}$  の差の形になっています。これは電流の正方向と反射波の進行方向が逆のためです。

線路 1 側の P 点の電流はそのまま線路 2 側の P 点電流になります。これは電流の漏れ回路が無いためです。よって

$$i = if_2 = \frac{ef_2}{Z_{02}} \quad (12.5)$$

(12.5)式に(12.3)式を代入して

$$if_2 = \frac{ef_2}{Z_{02}} = \frac{ef_1 + eb_1}{Z_{02}} \quad (12.6)$$

$i = if_2$  なので(12.4)式と(12.6)式が等しくなり、次式が成り立ちます。

$$\frac{ef_1 - eb_1}{Z_{01}} = \frac{ef_1 + eb_1}{Z_{02}} \quad (12.7)$$

(12.7)式を変形、整理すると次式の関係式が導かれます。(12.8)式の  $ef_1$  の係数が電圧前進波と電圧反射波の関係を決めるのでこの係数を電圧の反射係数と言います。

$$eb_1 = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot ef_1 = k_{refv} \cdot ef_1 \quad (12.8)$$

## 2) 電圧の透過係数 $k_{pv}$

(12.3)式の  $eb_1$  に(12.8)式の関係を入れて整理すると次式の透過波と前進波の関係が導かれます。前進波に乗じている係数  $k_{pv}$  が透過係数です。

$$\begin{aligned} ef_1 + eb_1 = ef_2 &\rightarrow ef_1 + \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot ef_1 = ef_2 \rightarrow \\ ef_2 &= (1 + k_{refv}) \cdot ef_1 = \frac{2 \cdot Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot ef_1 = k_{pv} \cdot ef_1 \\ \therefore k_{pv} &= (1 + k_{refv}) = \frac{2 \cdot Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \end{aligned} \quad (12.9)$$

## 3) 電流の反射係数 $k_{refc}$

電流反射波  $ib_1$  は反射電圧  $eb_1$  と線路 1 の特性インピーダンス  $Z_{01}$  から次のように表せます。

$$ib_1 = \frac{eb_1}{Z_{01}} \quad (12.10)$$

電流の正方向は  $if_1$  が進む方向で、反射波  $ib_1$  は逆向きであることを考慮すると

(12.10)式は

$$-ib_1 = -\frac{eb_1}{Z_{01}} \quad (12.11)$$

同様に電流前進波  $if_1$  は前進波電圧  $ef_1$  と線路 1 の特性インピーダンス  $Z_{01}$  から次のように表せま

す。

$$if_1 = \frac{ef_1}{Z_{01}} \quad (12.12)$$

(12.11)式を(12.12)式で除すると

$$\frac{-ib_1}{if_1} = -\frac{eb_1}{Z_{01}} \cdot \frac{Z_{01}}{ef_1} = -\frac{eb_1}{ef_1} \quad (12.13)$$

(12.13)式に(12.8)式の関係を入れて整理すると

$$-ib_1 = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot if_1 \quad (12.14)$$

よって(12.14)式より、電流の反射係数  $k_{refc}$  は

$$k_{refc} = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} = -k_{refv} \quad (12.15)$$

となり、電圧の反射係数に負号をつけた形になります。

#### 4) 電流の透過係数 $k_{pc}$

P 点左側の電流は

$$if_1 - ib_1 \quad (12.16) \quad \text{であり、この電流がそのまま分布定数回路 2 の}$$

電流  $if_2$  になるので次式が成り立ちます。

$$if_1 - ib_1 = if_2 \quad (12.17)$$

(12.17)式の  $ib_1$  に(12.14)式の関係を入れて整理すれば次の如く電流の透過係数の式が導けます。

$$\begin{aligned} if_2 &= \frac{2 \cdot Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot if_1 = k_{pc} \cdot if_1 \\ \therefore k_{pc} &= \frac{2 \cdot Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad (12.18) \end{aligned}$$

### 12.2 反射、透過の考察

以上を基に電圧、電流の反射、透過現象を考察して行きます。

#### 1) 線路 2 の特性インピーダンス値 $Z_{02} =$ 線路 1 の特性インピーダンス値 $Z_{01}$ のケース

この時はインピーダンスの整合状態となり電圧反射は発生しません。詳細を見て行きましょう。

##### a. 電圧の反射

電圧の反射係数は(12.8)式に  $Z_{02} = Z_{01}$  の関係を入れて、

$$eb_1 = \frac{Z_{01} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}} \cdot ef_1 = 0 \cdot ef_1 = 0 \quad (12.19) \quad \text{となるので反射係数は 0、反射電圧も 0 となりま}$$

す。このように P 点の両端の特性インピーダンスを等しくすれば整合状態が出現し、反射は発生しません。このように両線路の特性インピーダンスを等しくして反射を防ぐことをインピーダンスマッチングまたはインピーダンス整合と言います。

##### b. 電圧の透過

次にこの状態の電圧の透過波については(12.9)式から

$$ef_2 = \frac{2 \cdot Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}} \cdot ef_1 = ef_1 \quad (12.20) \quad \text{となるので P 点に入って来た前進波はそのまま}$$

P 点から線路 2 に入ってそのまま進行して行きます。

次に電流について考えます。

c. 電流の反射

$$(12.14)式に Z_{02} = Z_{01} の条件を入れると、 -ib_1 = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot if_1 = 0 \quad (12.21) となり 反射$$

電流は 0 になっています。電圧の反射が発生していないですから当然の結果ですね。

d. 電流の透過

このケースの電流の透過波は(12.18)式に  $Z_{02} = Z_{01}$  の関係を入れて

$$if_2 = \frac{2 \cdot Z_{01}}{2 \cdot Z_{01}} \cdot if_1 = if_1 \quad (12.22)$$

となり、P 点左側から来た前進波がそのまま線路 2 に進行して行くという結果になります。

以上のようにインピーダンス整合を行えば電圧、電流の反射は発生せず、あたかも一つの特性インピーダンス線路を進むように進行波が進行します。

2) 線路 2 の特性インピーダンス値  $Z_{02} > 線路 1$  の特性インピーダンス値  $Z_{01}$  のケース

a. 電圧の反射

電圧の反射波は(12.8)式に  $Z_{02} > Z_{01}$  の関係を適用すれば

$$\frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} > 0 \quad (12.23) となります。$$

つまり正反射となり、電圧の前進進行波と同じ極性の反射波となります。

電圧の反射係数の取り得る最大値は

$$\lim_{Z_{02} \rightarrow \infty} \left( \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \right) = 1 \quad (12.24) となります。$$

(12.23)式と(12.24)式から  $Z_{02} > Z_{01}$  の時取り得る反射係数の値は

$$0 < k_{refv} \leq 1 \quad (12.25) となります。$$

$k_{refv} = 1$  の時は  $\lim_{Z_{02} \rightarrow \infty}$  の時ですから、P 点右側の線路 2 は開放状態と同じです。

$k_{refv} = 1$  の時、反射電圧は(12.8)式から  $v = ef_1 + eb_1 = 2 \cdot ef_1$  なので P 点電圧は(12.2)式から

$$v = ef_1 + eb_1 = 2 \cdot ef_1 \quad (12.26) となります。$$

$Z_{02} = \infty$  の開放時の反射波は反射係数を使わずとも、図 34 に示すように開放端と同じ特性インピーダンスを持つ半無限長線路を接続し、この線路に前進進行波と同じ極性を有する電圧後進波が P 点に向かって来る  $ef_1$  の影像を考えて考察することもできます。

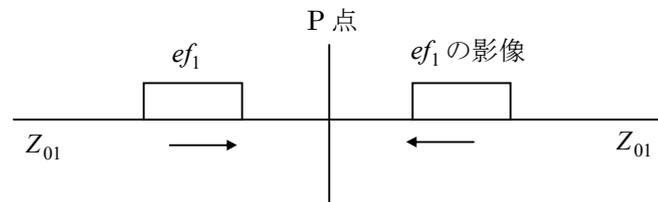


図 12.2-1 前進波の影像を使う方法

前進波と影像の波の合成で P 点の電圧は  $2 \cdot ef_1$  になり(12.25)式の結果に一致します。

**b. 電圧の透過**

$Z_{02} > Z_{01}$  の時の電圧の透過係数  $k_{pv}$  の最小値は(12.9)式から

$$k_{pv} = \lim_{Z_{02} \rightarrow Z_{01}} \frac{2 \cdot Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad (12.27) \quad \text{から } k_{pv} \text{ は } 1 \text{ に漸近します。}(k_{pv} = 1 \text{ は整合状態}$$

なので除きます)

また  $k_{pv}$  の取り得る最大値は

$$\lim_{Z_{02} \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \cdot Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \right) = 2 \quad (12.28)$$

よって  $Z_{02} > Z_{01}$  の時の透過係数  $k_{pv}$  の取り得る値は

$$1 < k_{pv} \leq 2 \quad (12.29) \quad \text{となります。}$$

$k_{pv} = 2$  の時は  $Z_{02} \rightarrow \infty$  ですから、P 点の右側の線路 2 は開放状態に相当します。

**c. 電流の反射**

次に  $Z_{02} > Z_{01}$  の時の電流の反射について考察して行きます。

(12.15)式にこのインピーダンスの大小関係を入れれば、取り得る反射係数は  $-1 \leq k_{refc} < 0$  です。よってこの反射電流は  $if_1$  と逆極性なので P 点より左側に進行します。この進行方向は電流の正方向と定めた向きと逆向きですから、P 点の左側の電流は  $if_1 - ib_1$  の大きさの電流となります。

$Z_{02} > Z_{01}$  のケースで  $Z_{02} = \infty$  の時を考えて見ましょう。

(12.29)式の反射係数は  $Z_{02} \rightarrow \infty$  の時、

$$\lim_{Z_{02} \rightarrow \infty} \left( \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \right) = -1 \quad (12.30) \quad \text{となります。}$$

よって

$$-ib_1 = -if_1 \quad (12.31) \text{ となります。}$$

この反射波は  $if_1$  と逆極性なので P 点より左側に進行します。この進行方向は電流の正方向と定めた向きと逆向きですから、P 点の左側の電流は  $if_1 - ib_1 (= if_1) = 0$  の大きさの電流となります。 $Z_{02} = \infty$  で P 点右側は開放端ですから線路 1 の電流は流れないという妥当な結論になります。

$Z_{02} = \infty$  の時の反射電流については反射係数の代わりに前進波電圧の影像を考えて直感的に電流前進波と反射電流が大きさ等しく方向反対なので相殺され線路 1 に流れないという結論を出せます。

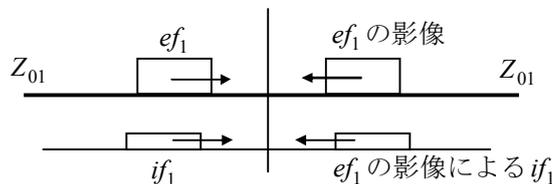


図 12.2-2  $ef_1$  の影像による方法

d. 電流の透過

$Z_{02} > Z_{01}$  の時、(12.18)式より  $Z_{02} = Z_{01}$  時の透過係数 1 から  $Z_{02}$  が増加するにつれて減少して行きます。

$Z_{02}$  が無限大になると(12.18)式より  $k_{pc} = 0$  になります。

$Z_{02}$  が無限大になれば、線路 1 に電流が流れないので当然透過波も 0 になるので妥当な結果です。

3) 線路 1 の特性インピーダンス値  $Z_{01} >$  線路 2 の特性インピーダンス値  $Z_{02}$  のケース

a. 電圧の反射

$Z_{01} > Z_{02}$  の時は(12.8)式より反射波  $eb_1$  の極性は分子が負になるので前進波の極性と逆極性の反射波になります。反射波は P 点から左の方へ後進する形になります。

P 点左側の電圧  $v$  は(12.2)から正極性 の前進波と負極性の反射波の和になるので、 $v < ef_1$  となります。

極端なケースでもし、 $Z_{02} = 0$  の時、すなわち P 点右側が短絡の時は

$$v = ef_1 + eb_1 = ef_1 + \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \cdot ef_1 = ef_1 - ef_1 = 0 \quad (V) \quad (12.32)$$

$Z_{02} = 0$  の時は反射係数を使わずとも、図 36 に示すように短絡端の代わりに同じ特性インピーダンスを持つ半無限長線路を接続し、この線路に前進進行波と反対極性を有する電圧後進波が P 点に向かって来る  $ef_1$  の影像を考えれば P 点電圧は前進波と影像波の合成で 0(V) になり、図 12.2-3 が終端短絡の等価な回路になります。

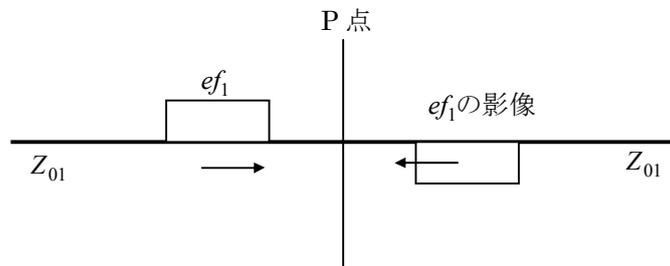


図 12.2-3 終端短絡ケースの影像

b. 電圧の透過

$Z_{01} > Z_{02}$  の時の透過係数は(12.9)式から  $k_{pv} = \frac{2 \cdot Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$  なので、最大値は  $Z_{01} = Z_{02}$  の整合状態

の時の 1 で、 $Z_{01} > Z_{02}$  になるにつれて  $k_{pv}$  は 1 より小さくなって行き最終的に次式のように 0 に収束します。

$$\lim_{Z_{01} \rightarrow \infty} k_{pv} = 0, \quad \text{又は} \quad \lim_{Z_{02} \rightarrow 0} k_{pv} = 0 \quad (12.33)$$

すなわち  $Z_{01} > Z_{02}$  の極端なケースの終端短絡の場合は  $k_{pv} = 0$  となるので電圧透過波は存在しません。

この終端短絡時の透過波は図 12.2-3 から前進波と影像波が P 点で相殺されるので 0 になることがわかります。

### c. 電流の反射

$Z_{01} > Z_{02}$  の時の電流の反射係数の取り得る値は(12.15)から、 $0 < k_{refc} \leq 1$  の間の正の値となります。

$Z_{02} = 0$  に漸近する時は P 点短絡状態に漸近し、この時の反射係数は 1 に漸近します。

すると(12.14)式より

$$-ib_1 = if_1 \quad (12.34) \quad \text{に漸近します。}$$

つまりこの場合の反射電流は  $if_1$  と同じ大きさ、同じ方向の電流になります。

(12.34)の関係を(12.16)に入れば、P 点左側の電流は

$$if_1 - ib_1 = if_1 + if_1 = 2 \cdot if_1 \quad (12.35) \quad \text{となります。}$$

つまりこの時の反射は負反射になるのですね。

進行波の影像を使って考えると次図のようになります。

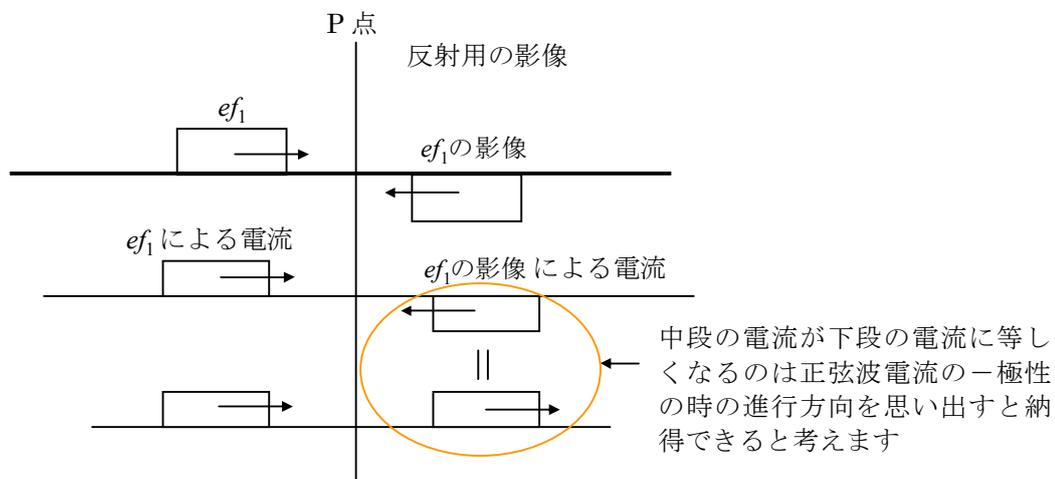


図 12.2-4  $Z_{01} > Z_{02}$  の時の電流の反射

上図で電圧反射については逆極性の影像波と前進波の和で重畳した電圧は 0 になります。(前進波電圧は P 点で負反射すると解釈しても同義です)

電流については上図の最下段に示すように電圧前進波による電流と、影像電圧による電流が P 点で同方向のため和となり  $2 \cdot if_1$  となります。

$Z_{02}$  が  $Z_{01}$  に漸近する時、反射係数は 0 の整合状態に漸近します。

### d. 電流の透過

$Z_{01} > Z_{02}$  の時の電流の透過係数  $k_{pc}$  は(12.18)から、 $Z_{01} = Z_{02}$  の整合状態では 1、 $Z_{02}$  が  $Z_{01}$  より小さくなって極限の  $Z_{02} = 0$  の時(=P 点右側は短絡状態)は  $k_{pc} = 2$  になります。

電流前進波と同じ方向に進む反射波の和の電流が P 点を透過して P 点右側の短絡点に流入することになります。

$Z_{01} > Z_{02}$  のケースの  $k_{pc}$  の取り得る値は

$$1 < k_{pc} \leq 2 \quad (12.36) \quad \text{となります。}$$

### 13. ATP(EMTP)による分布定数回路のシミュレーション

ここでは分布定数回路の基礎的なシミュレーションとして単相分布定数回路を取り上げます。ATP を使ってシミュレーションすれば数式を使わずとも極めて簡単に分布定数回路の任意の点の電圧、電流を簡単に知ることができることがお分かりになると思います。また複雑な分布定数回路では数式による解析的な解を求めることはできませんが、ATP ならこのようなケースでも任意の点の電圧、電流等を知ることができます。

以下のシミュレーションでは ATPDraw を使っています。

ATPDraw の基礎的な操作については当研究室の HP、

[http://homepage3.nifty.com/ATP\\_EMTP\\_research/](http://homepage3.nifty.com/ATP_EMTP_research/) →解説目次→「初めての方の ATP の使い方」に述べておりますので、必要により御参照ください。

#### 13.1 終端短絡の有限長分布定数回路のシミュレーション

11.2 項の終端短絡の有限長分布定数回路における電圧、電流を ATP でシミュレーションしてみます。

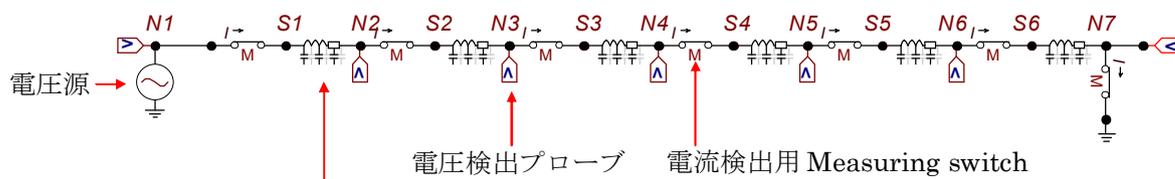
##### 1) 模擬回路構成

下図が ATPDraw で組んだシミュレーション回路です。終端短絡のケースなのでノード 7 を Measuring switch 経由接地しています。このようにすることで終端短絡になります。電流は大地を経由して電源に戻る単導体回路です。

下図模擬回路からわかるように大地は完全導体とみなしています。

下図の各種アイコンを開きデータを入力すれば自動的に ATP を走らせる入力データを作成したことになります。

同一内容のアイコンは最初のアイコンにデータ入力後そのアイコンを copy し、マウスで copy したアイコンを希望する位置まで Drag して何回でも張り付けることができるので同一内容のデータの再入力の手間を省けます。



全長を 6 分割した分布定数回路  
この分割はこられの点での電圧電流をシミュレーションしたいために分割しています。

図 13-1 模擬回路構成

このシミュレーションケースでは Measuring switch, 電圧検出プローブ、分布定数回路は皆同一の入力データ内容になるので最初のアイコンに入力して後は Copy→drag→paste の作業で済みます。

次に図 13-1 中の各種アイコンへの入力するデータの内容について説明します。

##### 2) 入力データの作成

入力データは第 図 13-1 の各アイコンにデータを入れれば完成します。

###### 2-1) 線路モデルと入力する線路定数について

この線路モデルアイコンへのデータ入力が今回のシミュレーションのかなめです。

単相分布定数回路は図 13-2 のように ATPDraw のキャンバス上にフローティングメニューを出して、Lines/Cables→Distributed→Transposed lines (Clarke)→1 phase をマウスで選択して行き最終的に 1 phase を選択します。

単相なのに Transposed lines の Category に入っている理由は、分布定数回路モデルは最初単相分布定数回路を含んで捻架モデルが開発され、その後 K.C.Lee によって非捻架モデルが開発されたため、それ以前のモデルは全て捻架モデルの Category としているためです。

このようにグループ分けの問題であって、実際には単相なので捻架のしようが無く、捻架はされていません。

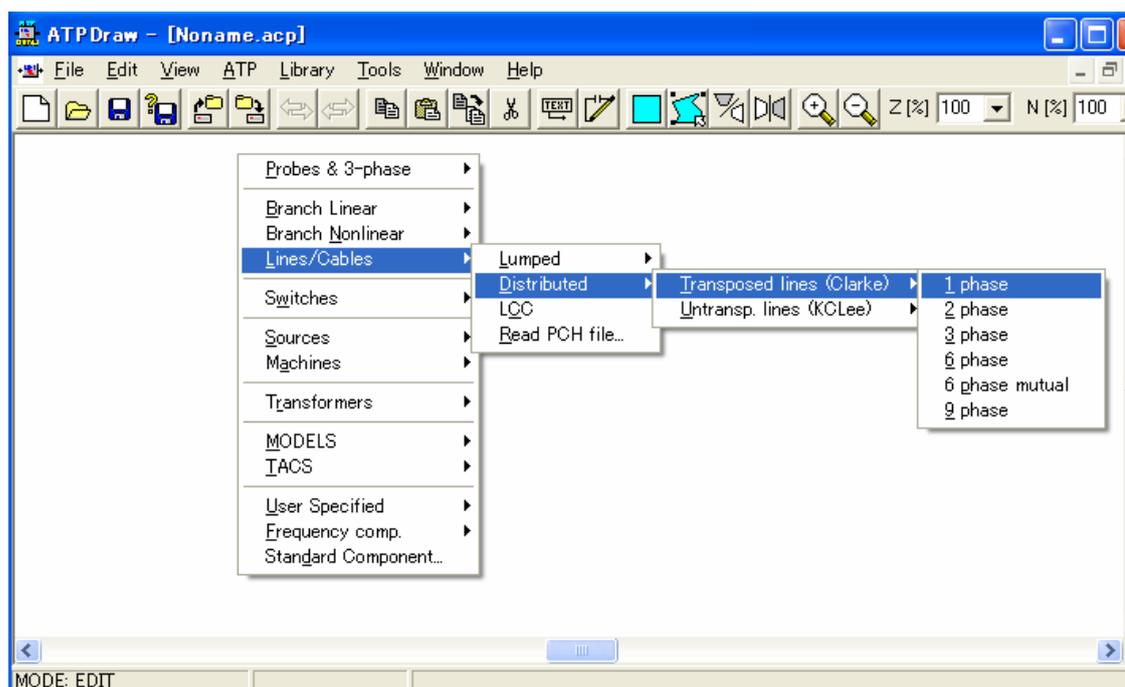


図 13-2

この選択の結果、次のアイコンがキャンバス上に表示されます。



これが単相分布定数回路のアイコンです。

直列インダクタンスと直列抵抗それと対地キャパシタンスから成り立つということをイメージするアイコンになっています。

線路定数がこの分布定数回路の全長に亘って同じである場合や、または線路の途中の電圧、電流を計算しないのであれば、このアイコンだけに入力すれば線路定数の入力は完了します。

線路定数が異なる分布定数回路がさらに直列に接続される場合は再びこのアイコンを呼び出し、新しい線路定数を入力の上、これらの分布定数回路を直列接続します。

線路定数が終端まで同一であっても線路の例えば 1/2 の所の電圧、電流をシミュレーションしたい場合は全長の半分の長さの分布定数回路を二つ作り、1/2 の位置に電圧測定プローブと電流測定用の Measuring Switch などを挿入します。図 13-1 は電圧、電流を測定するため全長を 6 分割した例です。

早速このアイコンにマウスを当て、右クリックしてみましょう。

すると次のようにデータ入力之窗が開きます。

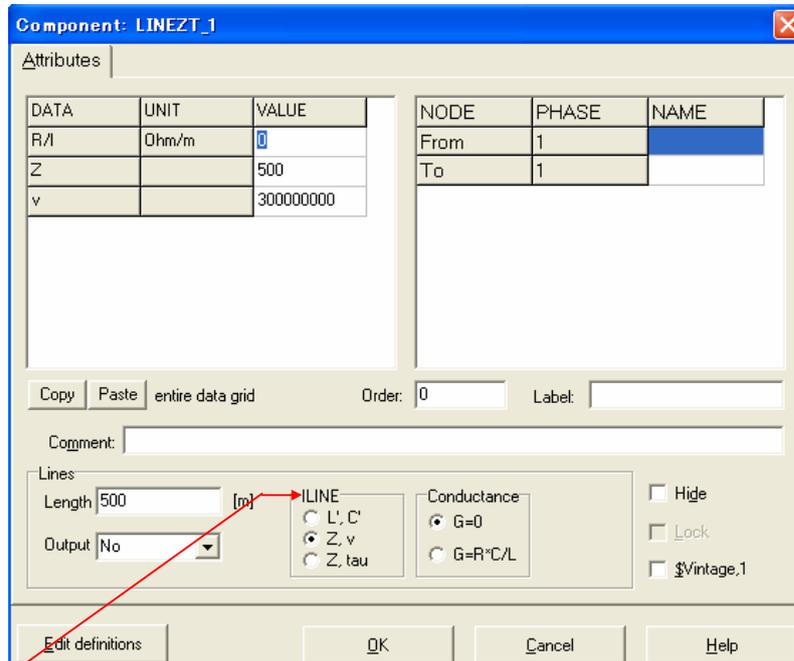


図 13-3

ここで ILINE の所でラジオボタンが Z,v についているのは線路定数をサージインピーダンスと伝搬速度で入力することを選択したことを示しています。Z, tau のラジオボタンをクリック(選択)すればサージインピーダンスと伝搬時間を入力することになります。今回は単位長当たりのインダクタンス、キャパシタンス及び抵抗で入力するので L,C を選択します。すると画面は次のように変わります。

R/l は R/L の意味で、1m 当たり(単位長当たり)の抵抗値を( $\Omega$ )の単位で入力します

この VALUE 欄に単位長あたりのインダクタンス(mH/m)とキャパシタンス( $\mu$ F/m)を入力します

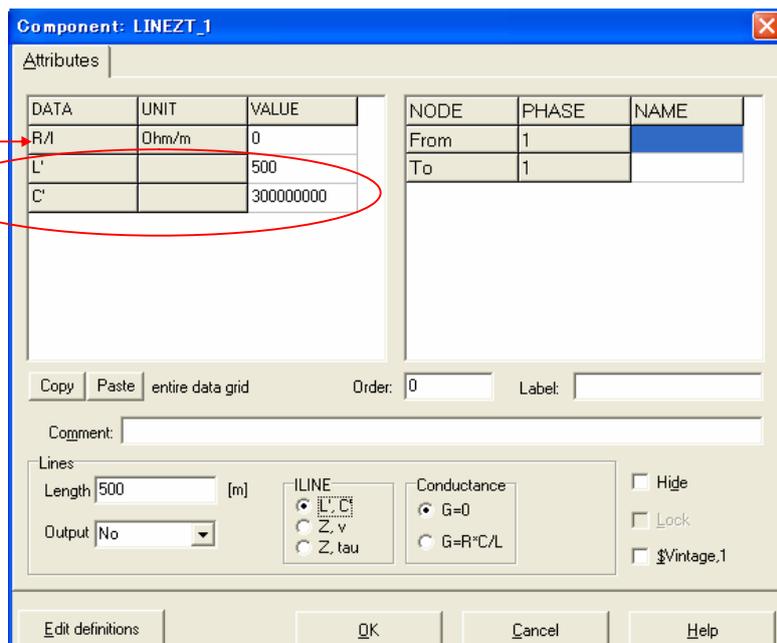


図 13-4

今回用のシミュレーションで使用した単相分布定数回路の入力内容は次図のとおりです。

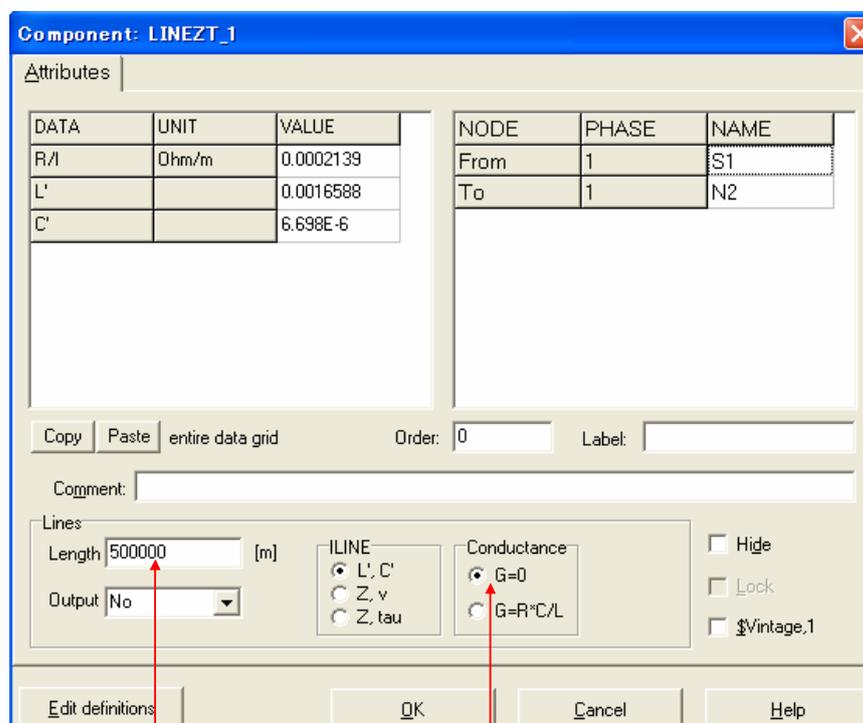


図 13-5

線路長は500km長さのものを6本直列に接続して3E6(m)の線路を作りだすようにしています。この理由は500kmごとの地点の電圧、電流を観察するためです。線路途中の電圧、電流観察が不要であれば、Length欄は全長の3E6と入力すれば一本の分布定数回路でokです。

コンダクタンスは一般に小さいのでこのケースでは無視し、0としています。

以下にこのアイコンの入力データについて解説します。

11.2項で使用した次の電気定数を少し加工すればATPの入力データになります。

11.2項で算出した結果は次の通りでした。

単位長当たりの抵抗	$R = 0.213904243 E - 3$	( $\Omega/m$ )
単位長当たりのインダクタンス	$L = 0.1658809928 E - 5$	(H/m)
単位長当たりのキャパシタンス	$C = 0.669824247310 E - 11$	(F/m)

少し加工すればとは以下の内容になります。

単位長の線路インダクタンスについて

ATPのインダクタンスの入力単位は(H)では無く、(mH)で入力する必要があります。

したがって、単位長のインダクタンスの入力データは0.001658809928(mH)とします。

デフォルトで抵抗、インダクタンス、及びキャパシタンスに用意されている入力データの桁数は6桁以内になっているのでATPDraw上でこれ以上の桁数で入力しても自動的に6桁に収まるように丸められます。

逆に言えば桁数を気にすることなく入力できるメリットになります。右詰で入力するとかどの位

置に入力すべきかと言うことも気にせず入力できます。  
これらは ATPDraw の便利な点の一つです。

但し、この 6 桁以内に丸められるのが気になる場合は 16 桁まで入力できる高精度入力 Format が使えるようになっています。  
この高精度入力フォーマットは抵抗、インダクタンス、キャパシタンスの入力に使えます。この高精度入力 Format の使い方は 14.2 項で紹介しています。

単位線路長のキャパシタンスについても同様に単位は(F)では無く、( $\mu$ F)で入力する必要があります。

したがって 6.6982424731E-6 になります。(このように詳細に入力しても自動的に 6 桁に収まるように丸められるのは上記と同じです。

単位長の抵抗は加工は不要で( $\Omega/m$ )の単位で入力すれば済みます。

このように入力したら Window 下部にある OK ボタンを押して入力内容を確定します。

## 2-2) 電圧源について

Type-14 という定電圧源を使用します。

これは ATPDraw のキャンバス上にフローティングメニューを出して、次図のように Source→ AC type 14 をマウスで選択します。

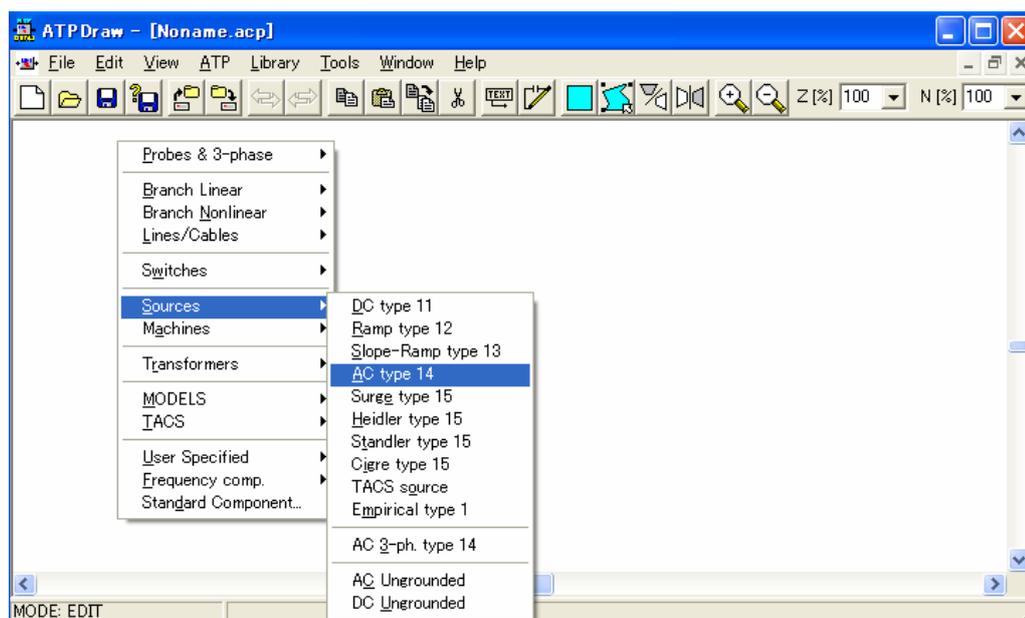


図 13-6

この選択の結果、次のアイコンがキャンバス上に表示されます。



アイコンを右クリックすると下図の入力窓が開きます。  
下図は今回用のシミュレーションで使用した電圧源の入力内容を示しています。  
以下にこのアイコンの入力データについて解説します。

ATP の電源波形は default で余弦波形( $t=0$  sec.で電圧値が最大となる正弦波曲線)に設定されています。

今回のシミュレーションでは電源電圧が最大の 1000 V Peak の時の電圧、電流値をシミュレーションするので余弦波のまま構いません。正弦波にしたい場合は Pha(位相遅れ)の入力欄に -90 と入力すれば ok です。

- 電圧振幅値
- 周波数
- 余弦波で位相遅れ 0 度
- 位相入力は度で行う宣言
- 電源を計算開始前から機能させる宣言
- 電源機能を停止する時間

DATA	UNIT	VALUE
Amplitude	Volt	1000
f	Hz	50
Pha	Deg/Rad	0
A1		0
TStart	s	-1
TStop	s	1000

Copy Paste entire data grid Order: 0 Label:

Comment:

Type of source:  
 Current  Hide  
 Voltage  Lock

Edit definitions OK Cancel Help

図 13-7

このように入力したら Window 下部にある OK ボタンを押して入力内容を確定します。

### 2-3) 電圧検出プローブと電流検出用 Measuring switch

電圧検出プローブは Floating menu から Probes & 3-phase→Probe Volt を選択します。

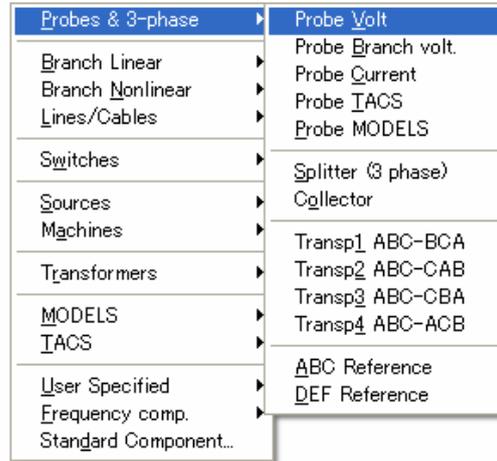


図 13-8

この選択の結果、次のアイコンがキャンバス上に表示されるので希望する位置までマウスでドラッグして貼り付けます。



アイコンを右クリックすると下図の入力窓が開きます。

Default 状態であるこの入力内容で OK なので OK ボタンを押して入力内容を確定します。

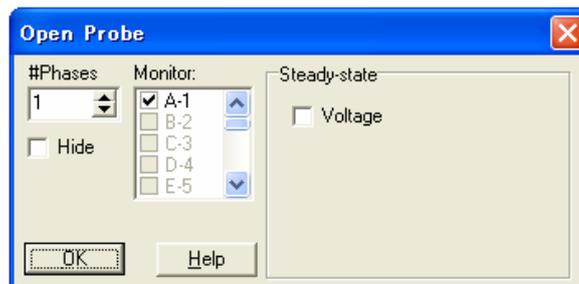


図 13-9

Measuring switch は図 13-10 のように Floating menu から Switches→Measuring を選択します。

尚、上述の Probe Volt の下方にある Probe current を使っても ok です。

ここでは Measuring switch で検出しています(Measuring swの方が多種類の出力を選択できるという一般的な理由で使っているに過ぎません)。

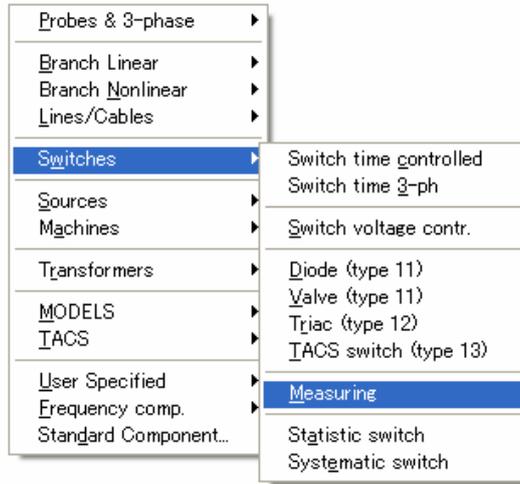


図 13-10

この選択の結果、次のアイコンがキャンバス上に表示されます。



アイコンを右クリックすると下図の入力窓が開きます。

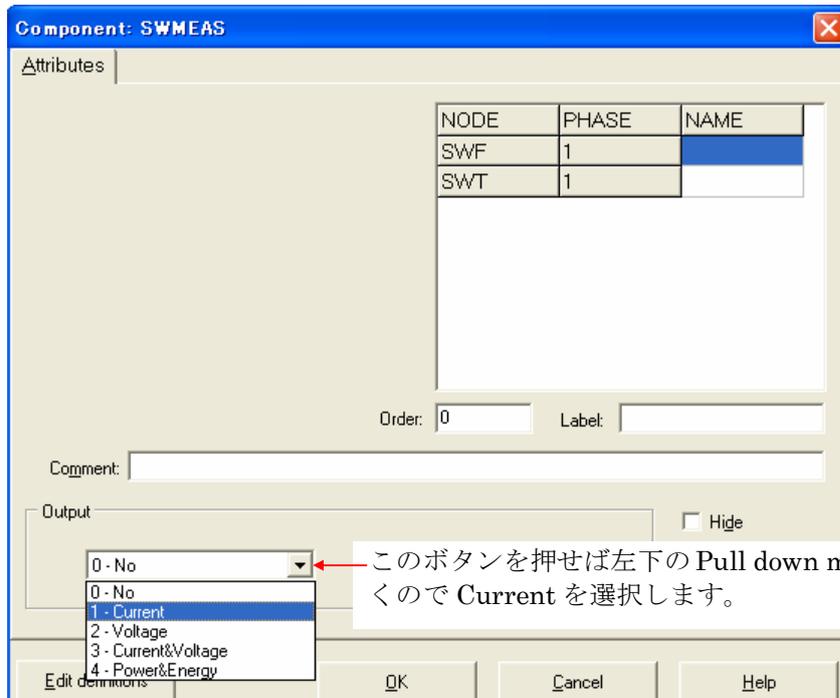


図 13-11

図 13-11 のようにしたら OK ボタンを押して入力内容を確定します。

以上でデータ入力が完了したので、必要個数アイコンを Copy し、希望する位置に貼り付け結線します。結線はアイコンの端子に Mouse の pointer を当て左クリックして Drag し、希望の位置で再度左クリックすれば結線できます。  
このようにして最終的に図 13-1 と等価な回路を構成します。

#### 2-4) 計算条件の設定

実際に計算を開始する前に計算条件を見直しましょう。

分布定数回路ではこの計算条件の検討が必須です。検討しないで適当に設定して計算するとメモリオーバーのエラーになったり、精度の低い結果になってしまうため大事な作業です。次のように検討します。

分布定数回路の計算刻み時間は、一般にシミュレーションする系統の中で最短の線路長に着目し、その線路のサージ伝搬時間  $\tau$  の 1/10 以下の刻み時間にすれば十分な実用精度が得られとされているので、これを目安に  $\Delta T$  を決めます。

今回は線路長 500 Km の分布定数回路で、架空送電線なので伝搬速度はほぼ光速になります。

したがって伝搬時間は  $\tau = 500\text{km}/c_0 = 500/300000 = 1.67 \times 10^{-3} \text{ sec.}$  となるので

計算刻み時間  $\Delta T$  は  $1.67 \times 10^{-4} \text{ sec.}$  以下の値、さらにメモリが許せばこの値の 1/4 にするという一般の計算刻み時間の設定方法によれば  $4.1 \times 10^{-5} \text{ sec.}$  となるので  $4.0 \times 10^{-5} \text{ sec.}$  とします。

但し、この方法が全てと言うわけではなく、インパルス状の波形のピーク値を問題にする時はインパルス状波形のピーク値を精度良く計算するため上記によらず計算刻み時間を更に短くする場合があります。この必要性は図 13-12 より明らかでしょう。

13.4 項では雷インパルス状の電圧を扱うため刻み時間を短くした例を紹介しています。

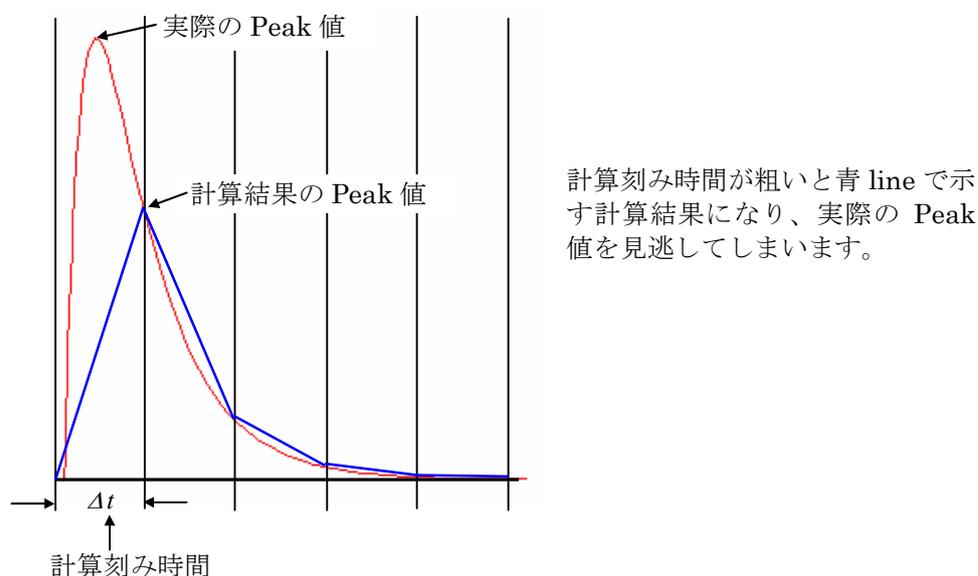


図 13-12

今回は線路長が長いので計算刻み時間は大きく取れるので楽です。逆に線路長が短い時は計算刻み時間を極めて小さく取る必要が出てくることからメモリ不足となり演算不能になる場合があるのでそのような場合は分布定数回路を集中定数の近似等価回路で置き換える必要性に迫られることがあります。

$c_0$  は光速で単位は *Km/sec.* です。  
最大計算時間は 20 msec.までとします。

これらの計算条件は  
ATPDraw の Menu bar の ATP から Settings...をクリックします。すると下図の入力窓が開くので下図のように入力し OK ボタンを押します。

Output, Switch/UM, Format, Record, Variable のタグが見えていますがこれらは Default 状態  
でかまいません。

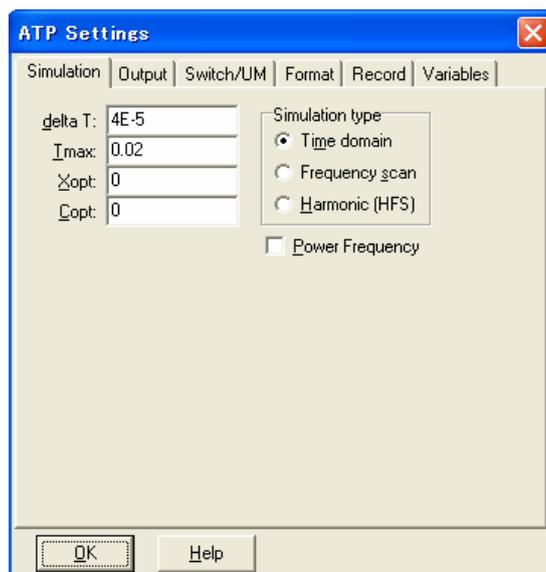


図 13-13

2-5) 上記作業で完成した ATPDraw ファイルに名前をつけて保存します。

Menu bar の「File」から「Save」を選択します。

すると File 名を入力する窓が開きます。Default で Noname.acp の File 名で表示されていますが、これを希望の File 名に上書きし、保存します。作業開始時に付けても構いません。その時は内容を完成させたら上書き保存させます。

#### 2-6) 計算開始

Menu bar の「ATP」から上から二つ目の「run ATP」をクリックすれば計算が開始されます。Dos 窓が自動的に開かれ計算途中の状況が表示され、計算完了で停止し Dos 窓の画面最下部に Hit any key to close this window.のメッセージが表示されます。いずれかの key を押すと Dos 窓は閉じます。

#### 2-7) Error 確認

計算の過程で Error が発生していないか次の手順で確認します。(この確認作業は必ず行う習慣をつけましょう。さもないと Error の発生している結果を解釈しようとして多くの時間をロスします)

Menu bar の「ATP」から「Edit Lis-File」をクリックします。

すると拡張子.LIS を伴った指定した File 名の計算を実行した内容が表示されます。

計算内容中に Error Message が無いことを確認したらこの窓を閉じます。

## 2-8) 計算結果の plot 表示

plot 作業の詳細については当研究室の「始めての方の ATP の使い方」の解説書の 4-6 項を御参照願います。

Menu bar の「ATP」から「PlotXY」をクリックすれば「MC's PlotXwin-Data selection」の窓が開きます。以下「MC's PlotXwin-Data selection」は「PlotXY」と称します。

では早速分布定数回路の 0km 地点のノード N1 から 3E3 (km) の N7 ノードまでの電圧を調べてみましょう。PlotXY の Variables 欄で、N1 から N7 を順番にクリックして行きます。クリックすると同時に右側の窓に選択された Data が表示され、下図のようになります。

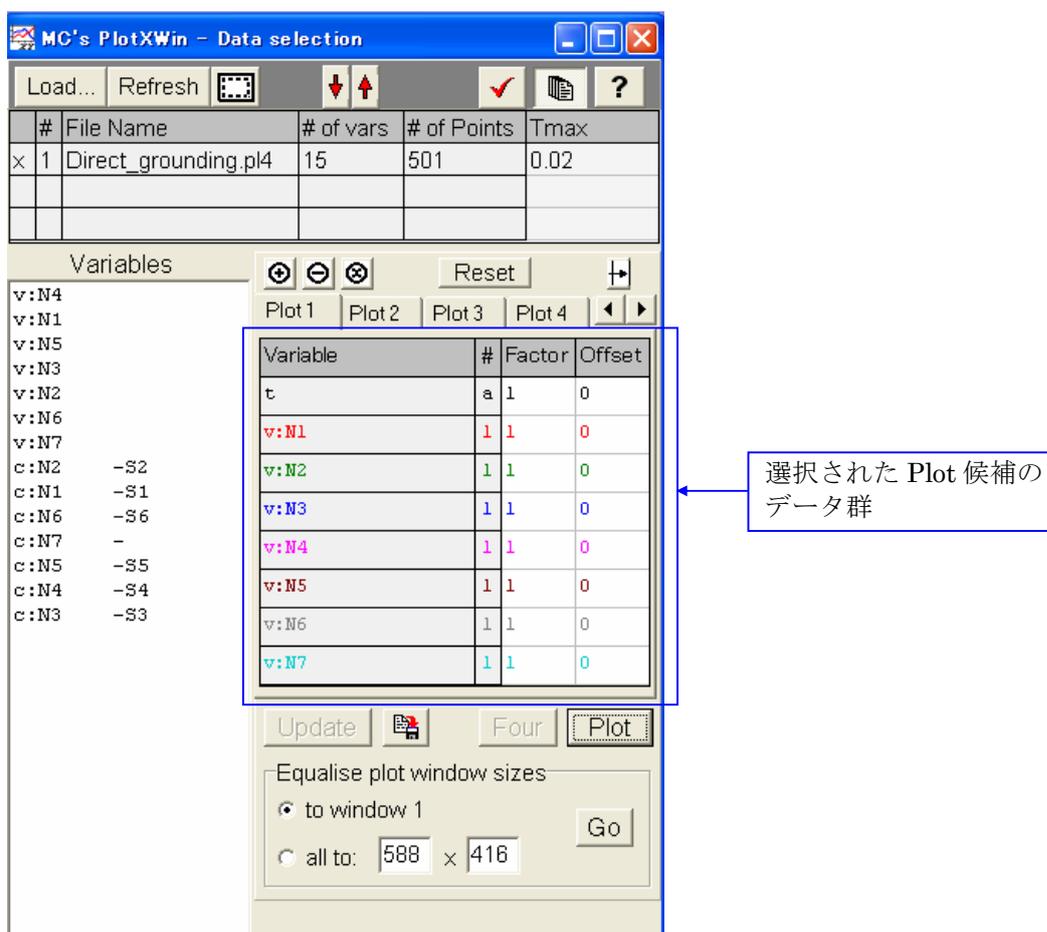


図 13-14

plot させる Data の選択が終わったら図 13-14 の右下部分にある plot ボタンを押します。

すると図 13-15 の如く計算結果が表示されます。これらのプロットがノード N1 から N7 の各点の  $t = 0 \sim 20$  msec. 間の電圧変化を表しています。

ATP の計算結果として得られるものは図 13-15 に示すようにノード N1~N7 の電圧の時間変化であって、図 4 に示したような距離に沿っての電圧分布ではありません。距離に沿った電圧分布を求めることはできない訳ではありませんが、そのためには線路を細かく分割した上で計算し、同一時刻の各ノードの電圧値を読み、それらを距離と電圧の関係に整理して別のソフトを使って plot する必要があります。

しかし一般には電圧、電流値を知りたい地点が決まっているので、線路長を細かく分割する必要

は無く、知りたい地点に合わせて分割すれば良く、その点で電圧等の検出を行えば知りたい地点の電圧や電流を ATP の計算結果から直ちに知ることができます。

Plot button を押すと次図が表示されます。

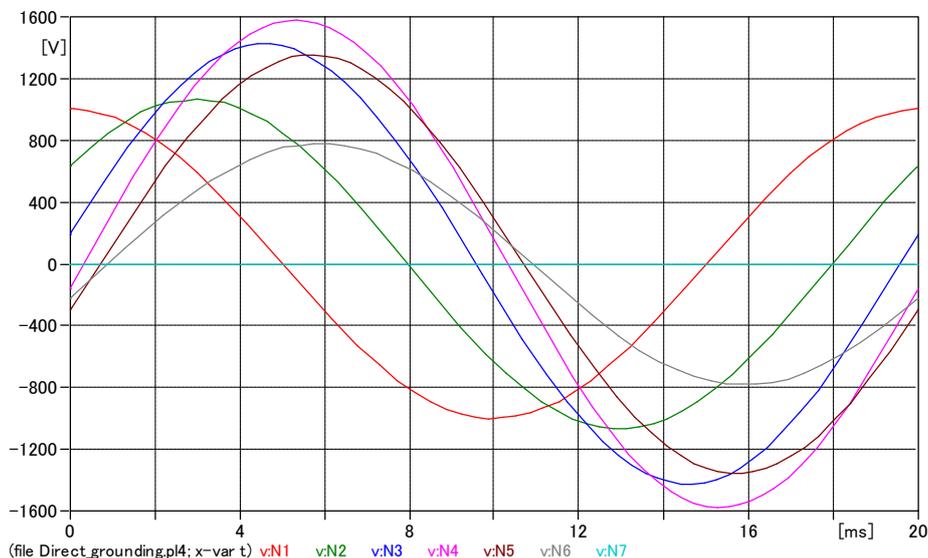
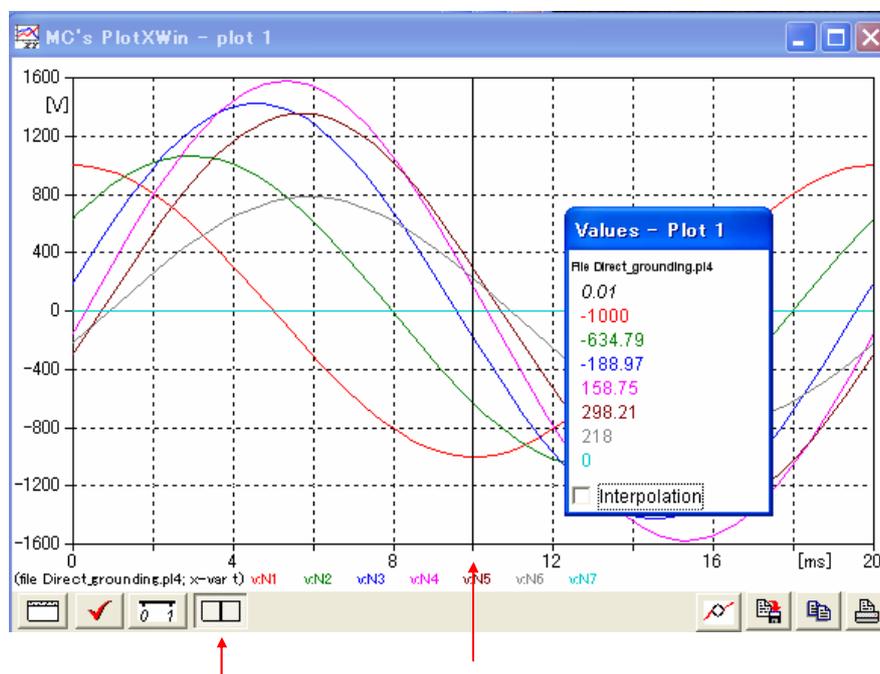


図 13-15

さて次はこの波形から計算値を読み取る作業をしますが、これは次図のようにカーソルを呼び出して使えば簡単に知ることができます。



カーソルを呼び出すため  
このボタンを押します。

するとプロット画面にカーソルが現れ  
各波形とカーソルの交点の電圧値が  
Values-Plot1 の窓に表示されます。

図 13-16 カーソルの使い方

さて、11.2 項では、「 $\dot{E}$  は 1000V の Peak 時の瞬時を取ってその時の分布定数回路に沿った電圧分布を数式からプロットする」と言う条件で数式から電圧波形プロットしています。比較のため ATP の計算結果もこれと同じ条件で表示しましょう。そのために次のようにします。

図 13-15 のシミュレーション結果は余弦波の電源電圧としていますから  $t = 0 \text{ sec.}$  で電源 1000 V Peak 値になります。したがって  $t = 0 \text{ sec.}$  の所にカーソルをマウスで Drag して移動すれば電源電圧が 1000 V Peak 時の各ノードの電圧が図 13-16 に示す Values の小窓に自動的に表示されます。

カーソルを左端の  $t = 0 \text{ sec.}$  に合わせた時の読み値は下図左側の通りになります。このように ATP を使用すれば極めて簡単に、短時間で疲れること無く結果を知ることができます。計算ケースをいろいろ変えて計算すれば現象の把握につながることでしょう。

11 項で掲載した表 11-1 の「simulation」欄の計算結果は下図左側の結果の小数点一桁目を四捨五入したものです。また表 11-1 の数式から計算した「電圧値」の値も下図右側の結果を小数点一桁目を四捨五入したものです。

下図の数値は上から下へ順にノード N1～N7 の電圧を示しています。

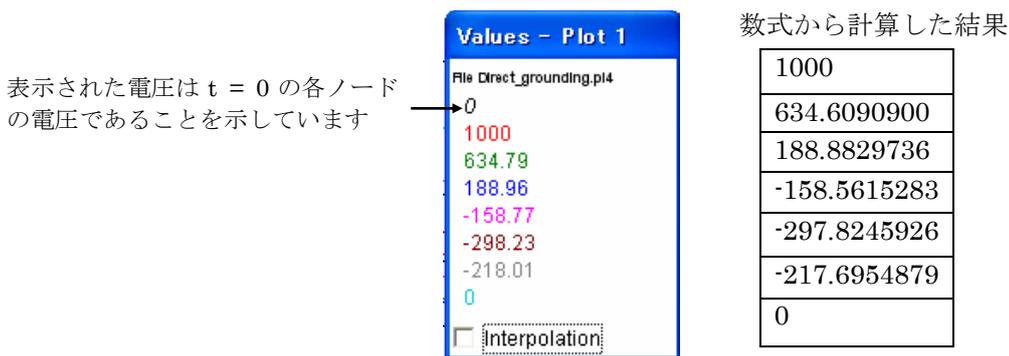


図 13-17

少数点以下一桁目を四捨五入すれば両者は同じ結果になりますが、両者に若干の差があるのがわかります。この計算結果の誤差は次項の高精度入力 Format を使えば改善できます。

### 13.2 高精度入力 Format を使ったシミュレーション

終端短絡の有限長分布定数回路のシミュレーションを例に取り、分布定数回路の線路定数を高精度 Format によってシミュレーションする方法を示します。この高精度計算機能を使うには次の順番で作業を行います。ATPDraw の画面上からの操作で説明します。

- ① 最初に入力作業を全て高精度で無い通常の入力で完成させて、ATP を走らせます。この時に拡張子が.atp のカードイメージの入力データが自動的に work holder 内に作成されます。  
例 Direct\_grounding.atp
- ② この.atp のファイルを Menu bar の ATP→Edit ATP-file を選択して呼び出し、手作業で高精度 Format に編集し直したら、Menu bar の File→Save As...を選択し任意の別名で保存します。例 Rev\_Direct\_grounding.atp。編集する箇所と内容は下記に記します。
- ③ 別名で保存した.atp を Menu bar の ATP→runATP(file)を選択すれば、work holder が開くので Rev\_Direct\_grounding.atp を選択し、開くボタンを押せば Rev\_Direct\_grounding.atp の高精度 Format の計算が開始されます。計算終了で Dos 窓に Hit any key to close this window の表示が出るのでいずれかの Key を押します。結果を得るという手順を踏みます。
- ④ 高精度 Format の計算結果のプロットを表示させるためには Menu bar の ATP→PlotXY(file)を選択します。すると work holder が開くので Rev\_Direct\_grounding.atp を選択し、開くボタンを押せば PlotXY が開くので Plot させるデータを選択して Plot ボタンを押せばそのデータの計算結果のカーブが描画されます。

Direct\_grounding.atp の編集し直す箇所は赤枠で囲んだ部分で、この部分を次ページのように変更します。

```

BEGIN NEW DATA CASE
C -----
C Generated by ATPDRAW 12月, 日曜日 20, 2009
C A Bonneville Power Administration program
C by H. K. Haldalen at SEFAS/NTNU - NORWAY 1994-2006
C -----
C dT << Tmax << Xopt << Copt >
  4. E-5 .02
    500 1 1 1 1 0 0 1 0
C 1 2 3 4 5 6 7 8
C 3456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
/BRANCH
C < n1 << n2 <<ref1><ref2>< R << L << C >
C < n1 << n2 <<ref1><ref2>< R << A << B <<Leng><<0
-1S1 N2 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
-1S2 N3 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
-1S3 N4 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
-1S4 N5 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
-1S5 N6 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
-1S6 N7 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0 0
/SWITCH
C < n 1<< n 2<< Tclose <<Top/Tde << le <<Vf/CLOP << type >
  N2 S2 MEASURING 1
  N1 S1 MEASURING 1
  N6 S6 MEASURING 1
  N7 MEASURING 1
  N5 S5 MEASURING 1
  N4 S4 MEASURING 1
  N3 S3 MEASURING 1
/SOURCE
C < n 1<<< Ampl. << Freq. <<Phase/T0<< A1 << T1 << TSTART << TSTOP >
14N1 0 1.E3 50. -1. 1.E3
/OUTPUT
  N4 N1 N5 N3 N2 N6 N7
BLANK BRANCH
BLANK SWITCH
BLANK SOURCE
BLANK OUTPUT
BLANK PLOT
BEGIN NEW DATA CASE
BLANK

```

エディタを有するお方はエディタでもこの ATP File を編集できます。  
 尚、分布定数回路の高精度 Format については JAUG のパスワード保護サーバの下記のところ  
 にある Rule book 中に記載されているので御参照ください。  
 Index of/~/support/rulebook/この中の J-Rb-04d-LEC.pdf または J-Rb-04d.pdf (これらはいず  
 れも和文)、原文は Rb-04d-LEC.pdf または Rb-04d.pdf です。

下記が編集後の.atp の File で、赤枠の部分が変更箇所を示しています。編集後の File 名は任意に付けられます。ここでは Rev\_Direct\_grounding.atp にしています。

```

BEGIN NEW DATA CASE
EXACT PHASOR EQUIVALENT ← 追記、定常解を正確なπ形回路で解くという宣言です。
C -----
C Generated by ATPDRAW 12月, 日曜日 20, 2009
C A Bonneville Power Administration program
C by H. K. Haldalen at SEFAS/NTNU - NORWAY 1994-2006
C -----
C dT << Tmax >> Xopt << Copt >
  4.E-5 .02
  500 1 1 1 1 0 0 1 0
C 1 2 3 4 5 6 7 8
C 34567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
/BRANCH
C < n1 >< n2 ><ref1><ref2>< R >< L >< C >
C < n1 >< n2 ><ref1><ref2>< R >< A >< B ><Leng><><0
$VINTAGE, 1
C < n1 >< n2 > < R >< L >< C >< Length >
-1S1 N2 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
-1S2 N3 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
-1S3 N4 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
-1S4 N5 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
-1S5 N6 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
-1S6 N7 .21390424E-3.001658809936.6982425E-6 5.E5 0 0
$VINTAGE, 2
C -1S1 N2 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
C -1S2 N3 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
C -1S3 N4 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
C -1S4 N5 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
C -1S5 N6 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
C -1S6 N7 .00021.001666.7E-6 5.E5 0 0
/SWITCH
C < n 1>< n 2>< Tclose ><Top/Tde >< le ><Vf/CLOP >< type >
  N2 S2 MEASURING 1
  N1 S1 MEASURING 1
  N6 S6 MEASURING 1
  N7 MEASURING 1
  N5 S5 MEASURING 1
  N4 S4 MEASURING 1
  N3 S3 MEASURING 1
/SOURCE
C < n 1><>< Ampl. >< Freq. ><Phase/T0>< A1 >< T1 >< TSTART >< TSTOP >
14N1 0 1.E3 50. -1. 1.E3
/OUTPUT
  N4 N1 N5 N3 N2 N6 N7
BLANK BRANCH
BLANK SWITCH
BLANK SOURCE
BLANK OUTPUT
BLANK PLOT
BEGIN NEW DATA CASE
BLANK

```

この部分のように左端に C + Blank space を 1 つ入力するとそれに続く右側の入力内容は全てコメントカード化され、入力データとは見なされなくなります。

上記変更箇所の内、EXACT PHASOR EQUIVALENT について補足説明します。

t = 0 sec.の各ノード電圧は ATP の定常解から知ることができます。

通常の定常解は抵抗分を線路の中央に R/2 の抵抗を両端に R/4 の抵抗を付けた一定損失モデルモデルを使って解かれますが、長距離線路の定常解を正確に求めるためにはπ型等価回路で求める必要があります。EXACT PHASOR EQUIVALENTはこのπ形線路モデルへ変換するための宣言文です。この宣言文が無いと一定損失モデルとして長距離線路の定常解としてはあまり精度の良くない定常解となります。これは Rule book 、RB-04D-LEC.PDF の 1.c 項に記載されています。この修正入力データを使った t = 0 sec.の電圧が 1000 Vpeak 時の各ノードの電圧の計算結果を図 13-18 に示します。

高精度 Format と EXACT PHASOR EQUIVALENT の宣言で ATP の計算結果は数式から計算した結果と極めて良く一致するのがわかります。

下図データは全て上から下へ順にノード N1～N7 の電圧です。

高精度 Format の  
計算結果



標準 Format の  
計算結果



数式から計算した結果

1000
634.6090900
188.8829736
-158.5615283
-297.8245926
-217.6954879
0

図 13-18

高精度 Format の計算結果の数値の更に詳細な数値は Rev\_Direct\_grounding.lis という.lis ファイルの定常解部分に表示されています。この部分の Copy を次ページに示します。

計算結果の各ノード電圧の波形は次のようになります。

高精度 Format の電圧波形は下図左側になります。右側の波形は標準 Format のものです。

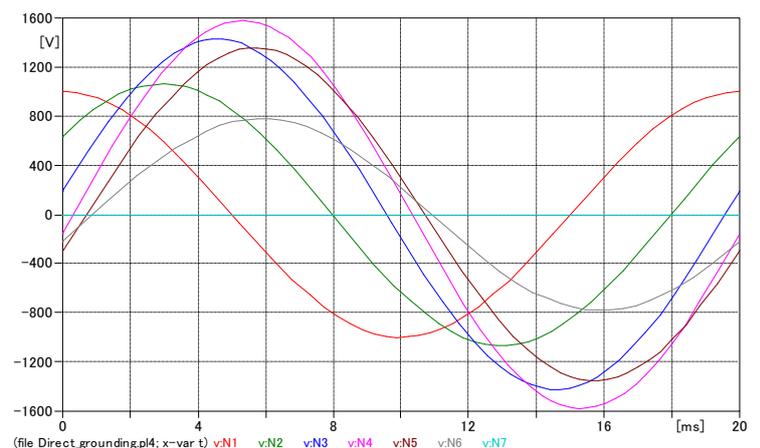
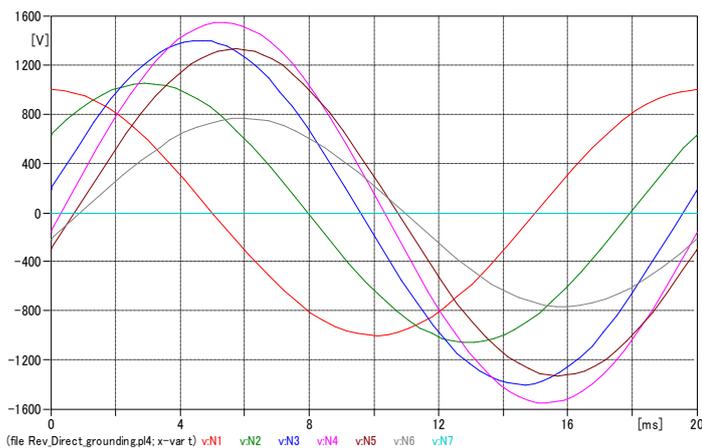


図 13-19

尚、Rev\_Direct\_grounding.lis ファイルの定常解部分は次のようになっており数式からの計算結果と小数点以下3~4桁まで良く一致しています。

Sinusoidal steady-state phasor solution, branch by branch. All flows are away from a bus, and the real part, magnitude, or "P" is printed above the imaginary part, the angle, or "Q". The first solution frequency = 5.00000000E+01 Hertz.

Bus K	Bus M	Phasor node voltage		Phasor branch current		Power flow		Power loss	
		Rectangular	Polar	Rectangular	Polar	P and Q	P and Q	P and Q	
S1		1000.	1000.	3.4111239925506	3.4349295221419	1705.5619962753	571.12055367565		
		0.0	0.0	.40370029666513	6.7494561	-201.8501483326	888.6811744		
N2		634.60907970077	1053.4941120267	-2.949876602308	2.9873915039982	-1134.4414426			
		-840.9049649255	-52.9590957	.47194918085976	170.9103116	1090.5313227339			
S2		634.60907970077	1053.4941120267	2.9498766023084	2.9873915039982	1134.4414425996	342.65954049256		
		-840.9049649255	-52.9590957	-.4719491808598	-9.0896884	-1090.531322734	35.2834100		
N3		188.88295501609	1400.2331224298	-1.745897010726	1.9659066880823	-791.7819021071			
		-1387.435053058	-82.2475133	.90367733964271	152.6338890	1125.8147327089			
S3		188.88295501609	1400.2331224298	1.7458970107262	1.9659066880823	791.78190210707	108.35077698964		
		-1387.435053058	-82.2475133	-.9036773396427	-27.3661110	-1125.814732709	-923.5941852		
N4		-158.561551262	1548.621			4311251174			
		-1540.482312097	-95.			2054755257			
S4		-158.561551262	1548.6211671748	.16941785182822	.92045883822965	683.43112511743	64.061238867606		
		-1540.482312097	-95.8767482	-.9047331453843	-79.3937808	-202.2205475526	-984.7396856		
N5		-297.8246131755	1329.9900913199	1.3554126858948	1.5007263378067	-619.3698862498			
		-1296.215314983	-102.9399633	.6442328708645	25.4219210	-782.5191380093			
S5		-297.8246131755	1329.9900913199	-1.355412685895	1.5007263378067	619.36988624983	222.16148665277		
		-1296.215314983	-102.9399633	-.6442328708645	-154.5780790	782.51913800929	-78.1564382		
N6		-217.6955000423	766.84945881909	2.4464441002892	2.4722241995141	-397.2083995971			
		-735.3004567879	-106.4920898	.35609515136152	8.2815975	-860.6755762052			
S6		-217.6955000423	766.84945881909	-2.446444100289	2.4722241995141	397.20839959705	397.20839959705		
		-735.3004567879	-106.4920898	-.3560951513615	-171.7184025	860.67557620517	860.6755762		
N7		0.0	0.0	2.8411771300592	2.8508840807911	0.0			
		0.0	0.0	.23505862616898	4.7294710	0.0			

Total network loss P-loss by summing injections = 1.705561996275E+03

回路図を見ればわかるように S1 node 電圧は Node N1 と同電位です。

この部分の定常解電圧は直交座標系の複素電圧になっています。上段は虚数部電圧、下段は実数部電圧です。

### 13.3 無限長線路のシミュレーション

線路を反射の影響を無くすために線路をあたかも半無限長線路としてシミュレーションする技法はシミュレーションで多用されています。

反射の影響を無くすには 12.2.1 で述べたように、線路 1 と線路 2 の特性インピーダンスを等しくすれば、その接続境界点で反射は発生しないという性質を利用します。しかしながら本方法は線路 2 を分布定数回路として行うのではなく、集中定数で線路 1 の特性インピーダンスを模擬するのであくまでも近似解となります。

11.2 項の回路で以下のケースで検討してみましょう。

- 1) 線路 1 の特性インピーダンスと等価なインピーダンスを線路 2 として接続する
- 2) 線路 1 の特性インピーダンスの代わりに特性インピーダンスの絶対値と同じ値の抵抗を線路 2 として接続する
- 3) 線路 1 のサージインピーダンスと同じ値の抵抗を線路 2 として接続する

1)と 2)項はほぼ同じ結果になると思われます。

3)項はサージインピーダンスは 4.4 項で述べたように周波数が  $\omega \Rightarrow \infty$  の時のインピーダンスです。一方今考える回路は商用周波数なのでサージインピーダンスを適用するのは不適切で結果は上記 2 項と異なったものとなる筈です。

検討を開始するにあたり、半無限長線路の 0.5E6, 1.0E6, 1.5E6, 2E6, 2.5E6, 3E6 (m)における電圧値を(3.9)式から求めておきましょう。

(3.9)式は

$v = E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot x)$  でした。今回は  $t = 0$  で電圧が最大になった時の電圧分布を調べるので実数部を取り次式になります。

$$v = E_m \cdot \exp(-\alpha \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x) \quad (14.1)$$

この線路の減衰定数  $\alpha$  と位相定数  $\beta$  は(11.18)式から

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2106951032 \text{ E} - 6 \\ \beta &= 0.1068183101 \text{ E} - 5 \end{aligned} \quad \text{です。}$$

(14.1)式に  $t = 0$ 、 $E_m = 1000$  (V) 及び、これら  $\alpha$  と  $\beta$  を入れ各距離における電圧を計算すると次のようになります。

距離	電圧値
0.5E6(m)	774.668
1.0E6(m)	390.201
1.5E6(m)	-22.944
2.0E6(m)	-351.620
2.5E6(m)	-526.192
3.0E6(m)	-530.429

集中定数で構成される線路 2 を接続してこれらの計算値に近い値が得られれば妥当な半無限長線路としたことになります。

#### 1) 特性インピーダンスと等価なインピーダンスを線路 2 として接続する

特性インピーダンスは(11.21)式から  $Z_0 = 507.6156063 - j 100.1252704$  です。この内のリアクタンス部からキャパシタンス値を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega \cdot C} &= 100.1252703 \quad (\Omega) \text{ より} \\ C &= 31.79116372 \quad (\mu F) \end{aligned} \quad (14.1)$$

よって線路 2 に接続するインピーダンスは

$$R = 507.6156063 \quad (\Omega)$$

$$C = 31.79116372 \quad (\mu F) \quad (14.2) \text{ の直列接続になります。}$$

ATPDraw の回路図は図 13-20 となります。  
分布定数回路、電源の入力データは 14.1 項と同じです。

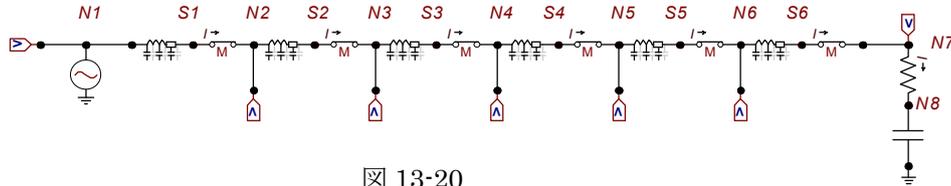


図 13-20

これらを接続して計算した結果は図 13-21 になります。本図から各地点の電圧波形はほぼ反射の影響が無く減衰しながら右側に進行して行っている様子が伺えます。

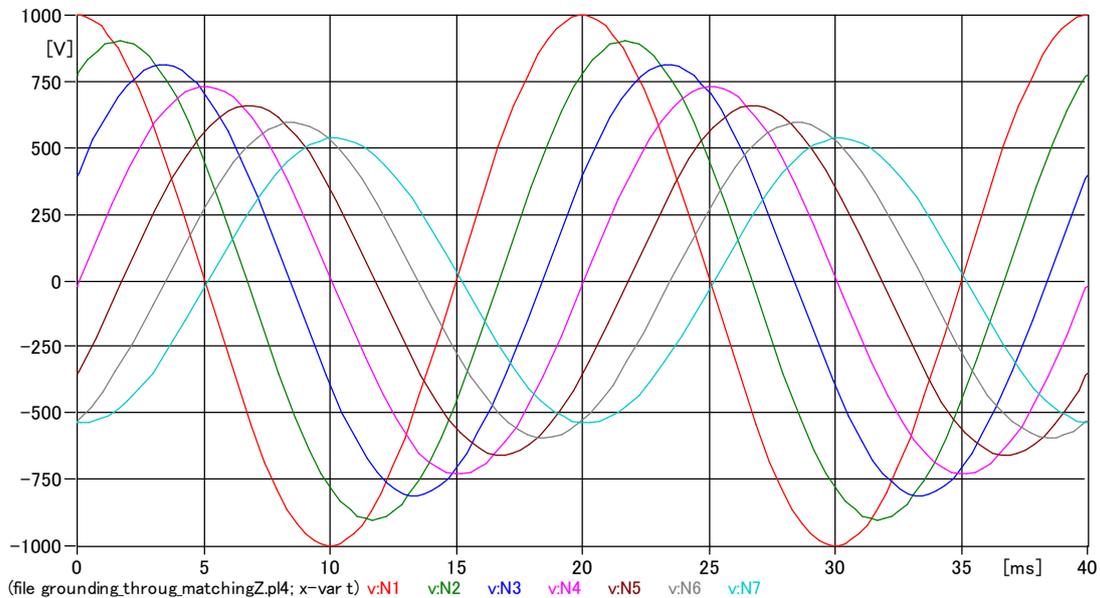
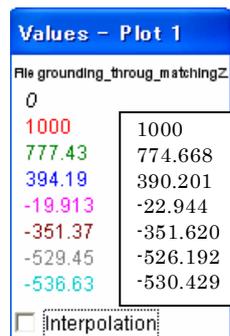


図 13-21

カーソルを  $t = 0 \text{ sec.}$  に合わせて  $E_m = 1000 \text{ (V)}$  peak 時の各地点の電圧の計算値を読むと次の結果になり、ほぼ半無限長線路での各地点の電圧の計算結果と符号しており、線路 1 の特性インピーダンスに等しいインピーダンスを線路 2 として接続した場合は半無限長線路と近似することができることがわかります。



← 半無限長線路での数式による計算値です

図 13-22

2) 特性インピーダンスの代わりに特性インピーダンスの絶対値と同じ値の抵抗を接続する

11.2 項の特性インピーダンスの絶対値は  $Z_0 = 507.6156063 - j100.1252704$  ですから

$$\sqrt{(507.6156063)^2 + (100.1252704)^2} = 517.3960508 (\Omega) \text{ です。}$$

この絶対値と同じ抵抗を線路 2 として接続した場合の計算結果を図 13-23 に示します。

$t = 0 \text{ sec.}$  の各地点の電圧の計算結果を右側に、数式の計算結果と共に示します。

14.3.1 の結果と比較すると計算式の値との乖離が大きくなっています。

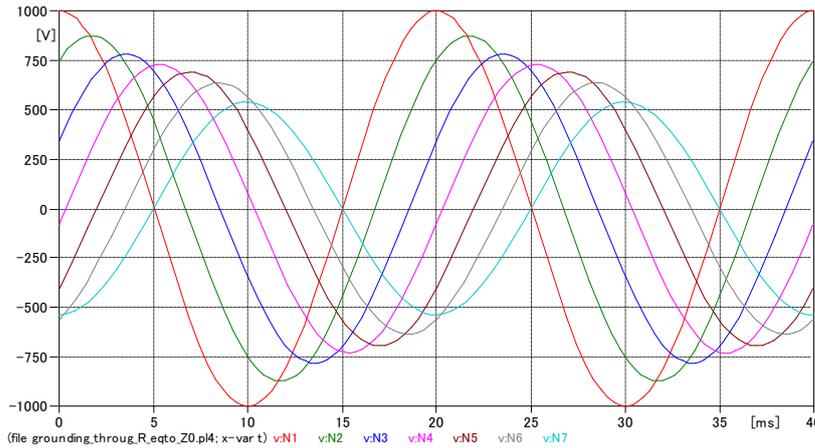


図 13-23

$t = 0$  の計算値

Values - Plot 1	
File grounding_through_R_eqto_Z0.	
0	1000
1000	774.668
749.75	390.201
345.3	-22.944
-78.224	-351.620
-404.28	-526.192
-562.2	-530.429
-538.03	
<input type="checkbox"/> Interpolation	

半無限長線路での数式による計算値です

3) サージインピーダンスと同じ値の抵抗を接続する

線路 1 のサージインピーダンスは 4.4 項から

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ です。これに } L, C \text{ の値を入れてサージインピーダンスを計算すると } 0.2284257714(\Omega)$$

となります。これと同じ抵抗を接続した時の計算結果を図 13-24 に示します。計算結果の波形はインピーダンス整合が取れていないので反射が発生している波形になっています。図 13-21 及び図 13-23 と比較するとわかります。

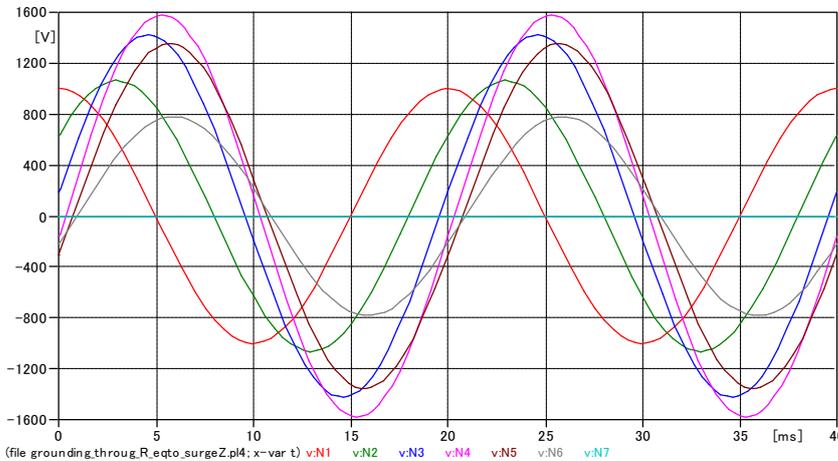


図 13-24

Values - Plot 1	
File grounding_through_R_eqto_sur	
0	1000
1000	634.89
634.89	189.09
189.09	-158.75
-158.75	-298.42
-298.42	-218.48
-218.48	-0.66282
-0.66282	
<input type="checkbox"/> Interpolation	

これは商用周波数の低周波にも拘わらず周波数 $\infty$ 時のサージインピーダンスを適用したため

インピーダンス整合が取れなくなったものです。

雷サージの如く高周波領域の電源の場合はサージインピーダンスに等しい抵抗を接続して反射の影響を無くし半無限長線路化することは行われています。

以上より、集中定数からなる線路 2 を接続して線路 1 を半無限長線路とする方法は線路 1 の電源周波数時の特性インピーダンスに等しい抵抗とキャパシタンスで模擬するのが適切であり、高周波領域の電源に対してはサージインピーダンスに等しい抵抗で模擬するのが適切になります。

### 13.4 雷サージシミュレーションの基礎

ここでは基礎的なシミュレーションとして雷サージ状のインパルス電圧が次図の回路に直接印加される場合をいってみましょう。

尚、本格的な雷サージシミュレーションでは電源は電流源として雷道インピーダンスを考慮します。線路モデルは架空地線と電力線からなる線路を考え、架空地線に雷直撃があった場合、鉄塔電位が上昇し(このために鉄塔モデルもプログラムに組み込みが必要です)、アークホーンより電力線に逆フラッシュオーバーして電力線に入る雷サージ電圧をシミュレーションします。逆フラッシュオーバーの部分には前駆放電のリーダモデルも考える必要があります。

以下はこれらを見捨てたもので線路に直接雷インパルス状の電圧が乗った場合のインパルス電圧の伝搬と減衰の様子をシミュレーションするものです。

#### 13.4.1 直列分布定数回路のシミュレーション

##### 1) 検討回路

今まで使ってきたのと同じ分布定数の線路としています。線路は無電圧状態からインパルス電圧が印加されるとしてしています。

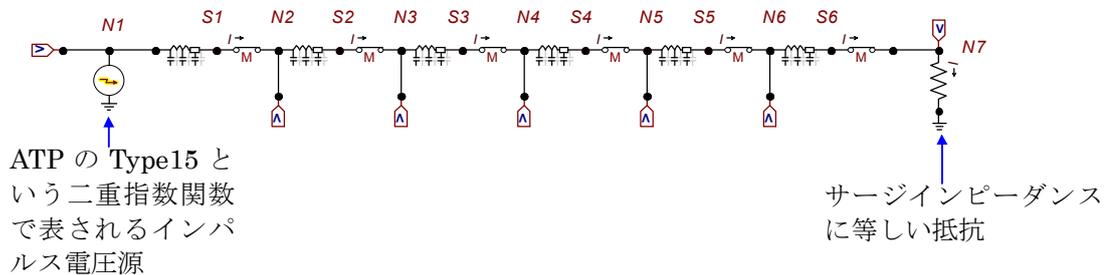


図 13-25 インパルス波形の伝搬減衰の検討

##### 2) インパルス波形

次の二重指数関数(double-exponential function)の規約波形を模擬しましょう。

波高値 100 KV

規約波頭長  $T_1$  2  $\mu$  sec.

規約波尾長  $T_2$  70  $\mu$  sec.

ATP には各種インパルス電源が用意されています。ここでは Type15 という二重指数関数のインパルス電源を使います。この電源は次式の式で表される二重指数関数の波形を使っています。

$$i = K \cdot V \cdot (\exp(-\alpha \cdot t) - \exp(\beta \cdot t)) \quad (14.4.1-1)$$

$K \cdot V$  は二重指数関数の振幅です。

(14.4-1)式の二重指数関数の各パラメータを決めるには次のようにします。

$T_1, T_2$  から JEC-212-1981 の付図 6 を使い、 $a, b$  の値を求めます。

$$a = 0.73$$

$$b = 2.9$$

(14.4.1-2)となります。

次に  $\alpha$ 、 $\beta$  は  $a, b, T_1, T_2$  から次式で求めます。

$$\begin{aligned} \alpha &= a/T_1 \\ \beta &= b/T_2 \end{aligned} \quad (14.4.1-3)$$

よって  $\alpha$ 、 $\beta$  の値は次のようになります。

$$\begin{aligned} \alpha &= 10428.571 \\ \beta &= 1450000 \end{aligned} \quad (14.4.1-4)$$

これらを ATP の Type 15 の Surge 電源に入力します。

Type 15 の Surge 電源入力部分は A,B の表記は  $\alpha$ 、 $\beta$  で無く A,B になっていてこれらと  $\alpha$ 、 $\beta$  の対応は次のようになっています。

$\alpha \rightarrow A$ 、 $\beta \rightarrow B$  に対応します。(14.4-4)の値に-符号をつけて入力します。

次に  $K \cdot V$  値を求めます。

$K \cdot V$  値は二重指数関数の振幅値(片振幅値)になります。

次にこの  $K \cdot V$  を求めます。これは次のようにして求められます。

二重指数関数が最大値になる時間  $t$  で次の式が成り立たなければなりません。

$$100000 = K \cdot V \cdot (\exp(-\alpha \cdot t) - \exp(\beta \cdot t)) = K \cdot V \cdot \{\exp(-10428.571 \cdot t) - \exp(-1450000 \cdot t)\} \quad (14.4-3)$$

$K \cdot V$  値を求めるには二重指数関数が最大値になる時間  $t$  を(14.4-3)に入れる必要があります。

この時間  $t$  は(14.4-3)式の右側の式の{}内を時間で微分し、これを 0 とおいて求められます。

この計算結果は  $t = 3.4279E-6$  (sec) (14.4-4) となります。

(14.4-3)式の右側の式にこれを代入して  $K \cdot V$  は次のように求められます。

$$K \cdot V = 100000 / 0.9579433288 = 104390.31$$

この  $K \cdot V$  値を Type 15 の Amplitude の入力データとして入力します。

これらを入力した結果を図 13-27 に示します。

注) 二重指数関数の振幅値はこのように104390.31Vです。この振幅を持つ二つの指数関数を描くと下図のようになりこれらの指数関数の差の結果として波高値 100KV の二重指数関数が得られるわけです。

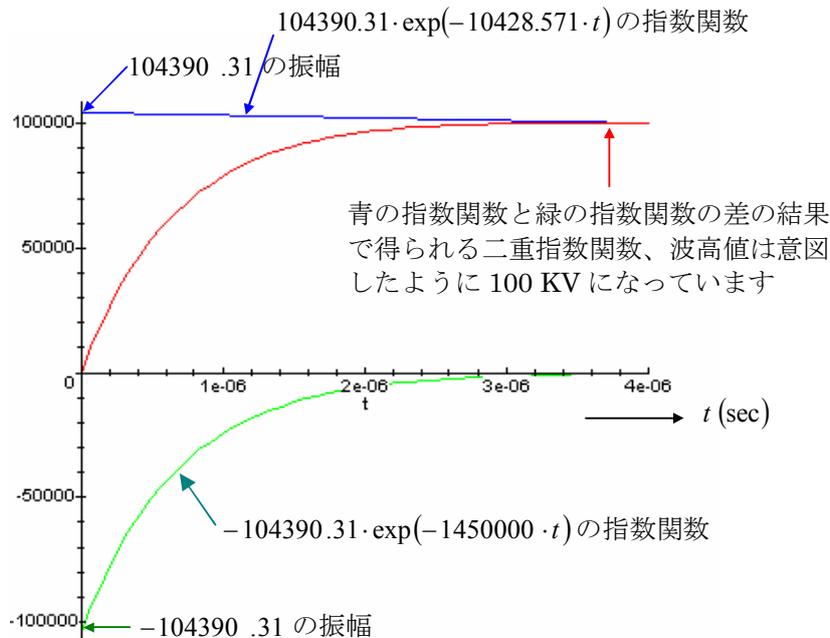
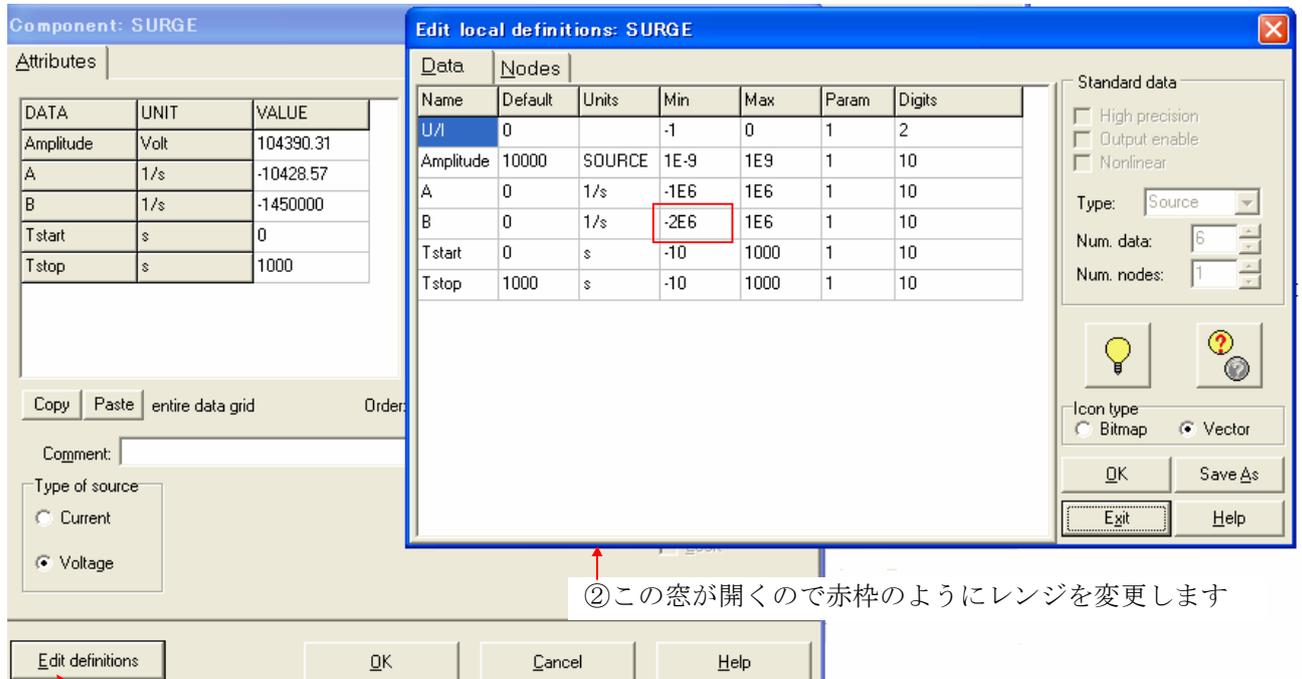


図 13-26 二重指数関数を構成するそれぞれの指数関数曲線と二重指数関数曲線の関係

尚、入力に先立ち、この電源の入力データ画面の左下にある「Edit definitions」のボタンを押し、B の設定レンジを Default の-1E6 から 2E-6 に変えておきます。これは B の値が Default の-1E6 を超える値のためです。このレンジ変更をしないとデータの入力はできません。次のように変更しておきます。



②この窓が開くので赤枠のようにレンジを変更します

①電源の入力画面でこのボタンを押します。

図 13-27 入力データのレンジ変更の仕方

今回のデータを入力した状態の入力窓を次図に示します。

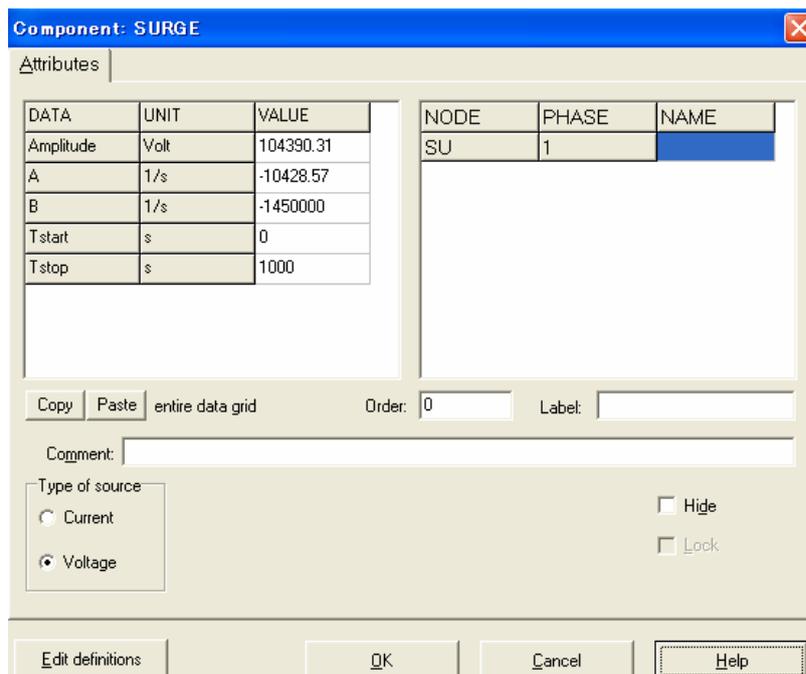


図 13-27 インパルス電源への入力データ

### 3) 計算条件の設定

インパルス状の電圧が印加されるので 14.1 の 2-4)項に述べたようにピーク値を見逃さないように計算刻み時間は  $1E-7$  sec. と細かくします。

### 4) 終端に接続したサージインピーダンス

14.3 の 3)と同じサージインピーダンスを接続しています。

### 5) 計算結果

印加された二重指数関数のインパルス波形は次のようになり、波高値は意図した通り 100 KV Peak になっています。

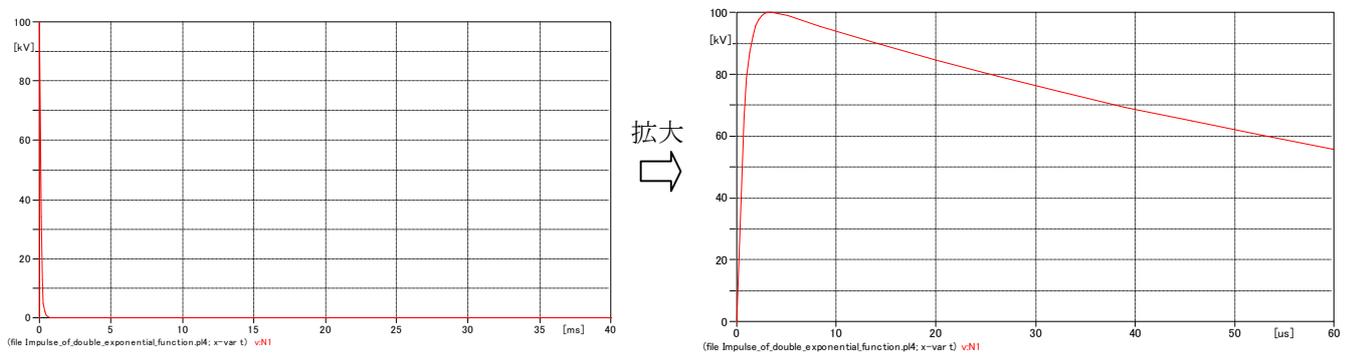


図 13-28 印加インパルス電圧

各ノード電圧をプロットすると図 13-29 のようになります。

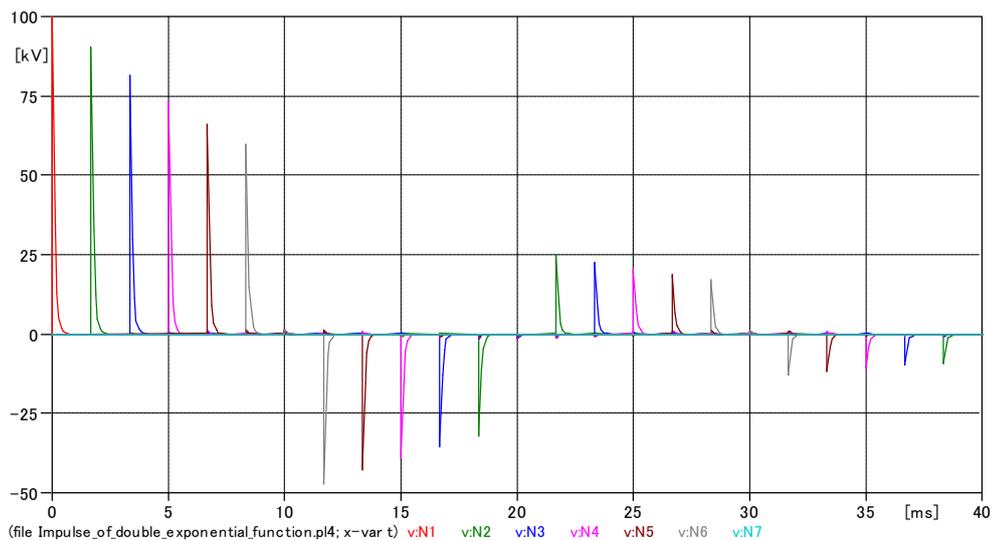


図 13-29 各ノード電圧

印加インパルスは減衰しながら終端に向かって進行し、終端インピーダンスが小さいため負反射が発生しノード N1 に向かって進行し、ノード N1 は開放端なので正反射しまた終端に向かって

進行するという繰り返しになる様子がこのシミュレーションの結果から明らかに観察されます。

### 13.4.2 並列分布定数回路のシミュレーション

図 13-30～図 13-3 に示す構成の分布定数回路に雷インパルス状の電圧が印加された場合のノード 1N2、ノード 2N2、ノード 3N2 の電圧をシミュレーションしてみましょう。  
このシミュレーションは発電所の雷サージ問題を考えるときの参考になります。  
なぜなら並列回路数が多いほどノード 1N2、ノード 2N2、ノード 3N2 の電圧は低下するので、一番過酷な条件は図 13-30 のように単独回路の場合であるということがわかるからです。

分布定数回路は 500Km 長の単位回路を下図のように結線しています。  
終端のサージインピーダンスに等しい抵抗、計算刻み時間は前項と同じです。

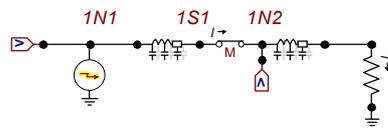


図 13-30

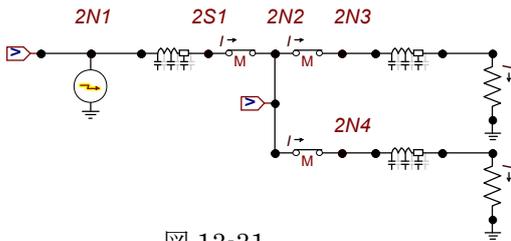


図 13-31

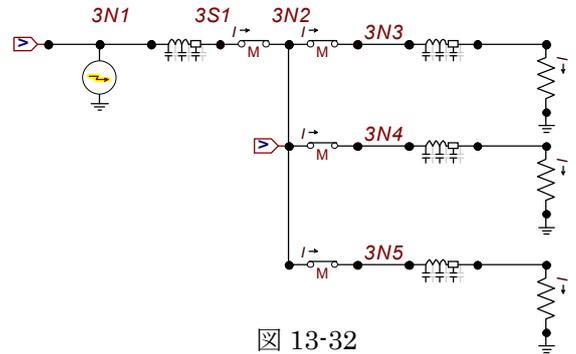


図 13-32

計算結果と最大電圧値の読み次図に示します。

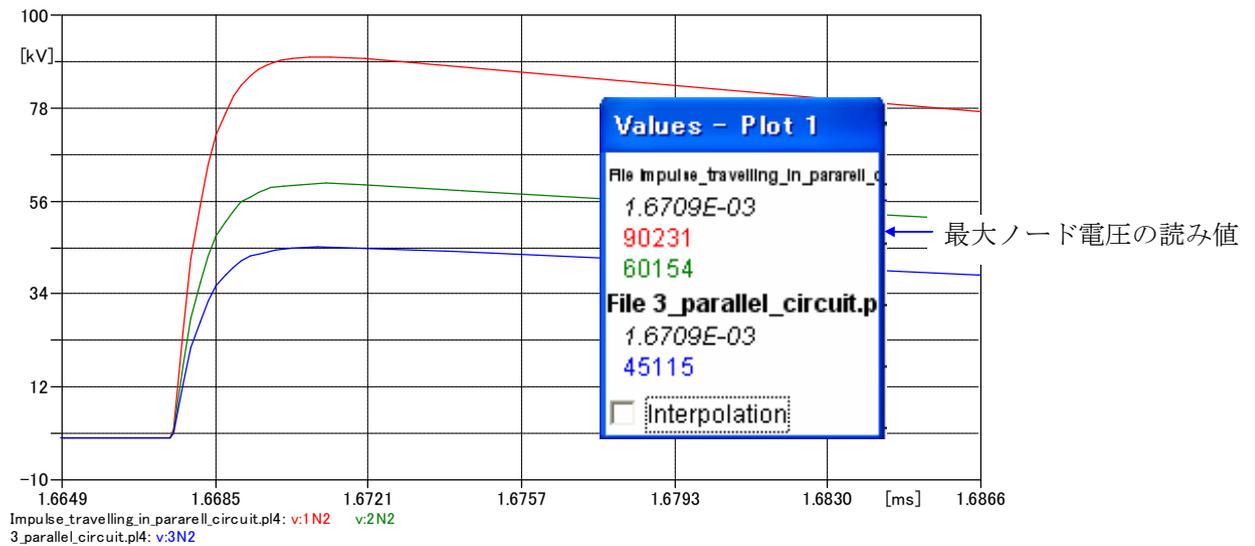


図 13-33 ノード 1N2, 2N2, 3N2 の電圧

このように並列回路が無い場合のノード 1N2 の電圧は 90231 V Peak であり、並列回路が 2 回路の場合は並列回路が無い場合の 2/3 の大きさの 60154 V peak になり、並列回路が 3 回路の場合は並列回路が無い場合の 1/2 の大きさの 45115 V peak になります。このように 2/3, 1/2 の大きさになることは次の単純計算で求めることができます。

図 13-30 のノード 1S1 を流れる電流  $i$  は大地への漏れ電流が無視できるレベルであり、終端抵抗も分布定数回路の特性インピーダンスに比して小さくて無視できればインパルス状電圧を  $v(V)$ 、分布定数回路のサージインピーダンスを  $Z$  とすれば

$$i \cong \frac{v}{2 \cdot Z} \quad (14.4.2-1)$$

$$\text{ノード 1N2 の電圧は } i \cdot Z = \frac{v}{2 \cdot Z} \cdot Z = \frac{v}{2} \quad (14.4.2-2)$$

図 13-31 でも同様にノード 2S1 を流れる電流は

$$i \cong \frac{v}{Z + \frac{Z}{2}} \quad (14.4.2-3)$$

$$\text{ノード 2N2 の電圧は } \frac{i}{2} \cdot Z = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{Z + \frac{Z}{2}} \cdot Z = \frac{v}{3} \quad (14.4.2-4)$$

$$\text{よって(14.4.2-2)の } \frac{v}{2} \text{ を 1P.U. とすれば(14.4.2-4)の値は } \frac{2}{3} \text{ (P.U.)} \quad (14.4.2-5)$$

同様に図 13-32 でノード 3S1 を流れる電流は

$$i \cong \frac{v}{Z + \frac{Z}{3}} \quad (14.4.2-6)$$

$$\text{ノード 3N2 の電圧は } \frac{i}{3} \cdot Z = \frac{1}{3} \cdot \frac{v}{Z + \frac{Z}{3}} \cdot Z = \frac{v}{4} \quad (14.4.2-7)$$

$$\text{よって(14.4.2-2)の } \frac{v}{2} \text{ を 1P.U. とすれば(14.4.2-7)の値は } \frac{1}{2} \text{ (P.U.)} \quad (14.4.2-5)$$

となります。

## 14 参考文献

- 1) 分布定数回路論 関根泰次監修 雨谷昭弘著 コロナ社発行
- 2) 電気回路論 電気学会

## Appendix 1 複素電圧について

ATP では Default 状態で正弦波状に変化する電源波形は余弦波形になっています。電源電圧を例にとって説明します。

この余弦波形は図 A1-1 に示すように回転ベクトル  $\dot{V}$  が  $t = 0$  sec. の位置から半時計周りに角速度  $\omega$  で回転する時の虚数軸への投影になります。回転ベクトルが  $\omega \cdot t$  回転した時の

虚数軸への投影は  $v_{imag} = |\dot{V}| \cdot \cos(\omega \cdot t)$

実数軸への投影は  $v_{real} = |\dot{V}| \cdot \sin(\omega \cdot t)$  となります。

これらの  $v_{imag}$  と  $v_{real}$  は虚数と実数になるので回転ベクトル  $\dot{V}$  の複素電圧と呼ばれます。

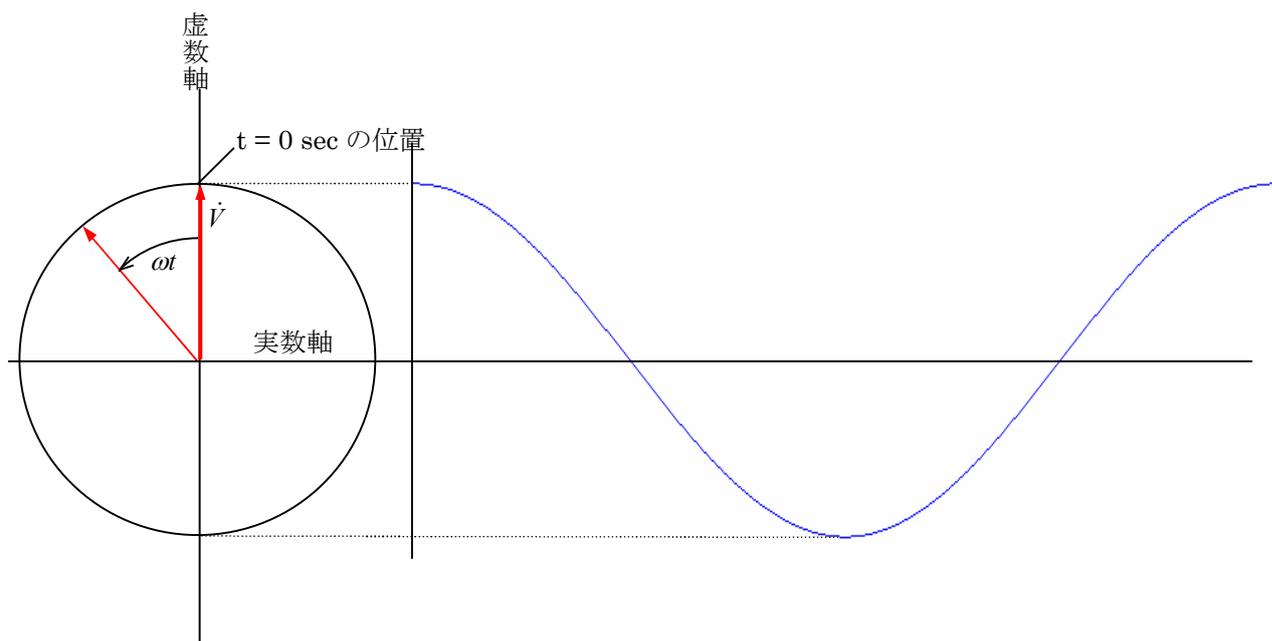
14.2 項に添付した Rev\_Direct\_grounding.lis ファイルの定常解の虚数部電圧はこのように定義されたものです。

回転ベクトル  $\dot{V}$  の大きさ  $V$  は複素電圧の絶対値で

$$V = |\dot{V}| = \sqrt{(v_{real})^2 + (v_{imag})^2} \text{ です。}$$

この絶対値と偏角を用いた極座標表示で回転ベクトル  $\dot{V}$  を表示することもでき、それを実数部と虚数部の複素電圧に分解できることはご存知のとおりです。

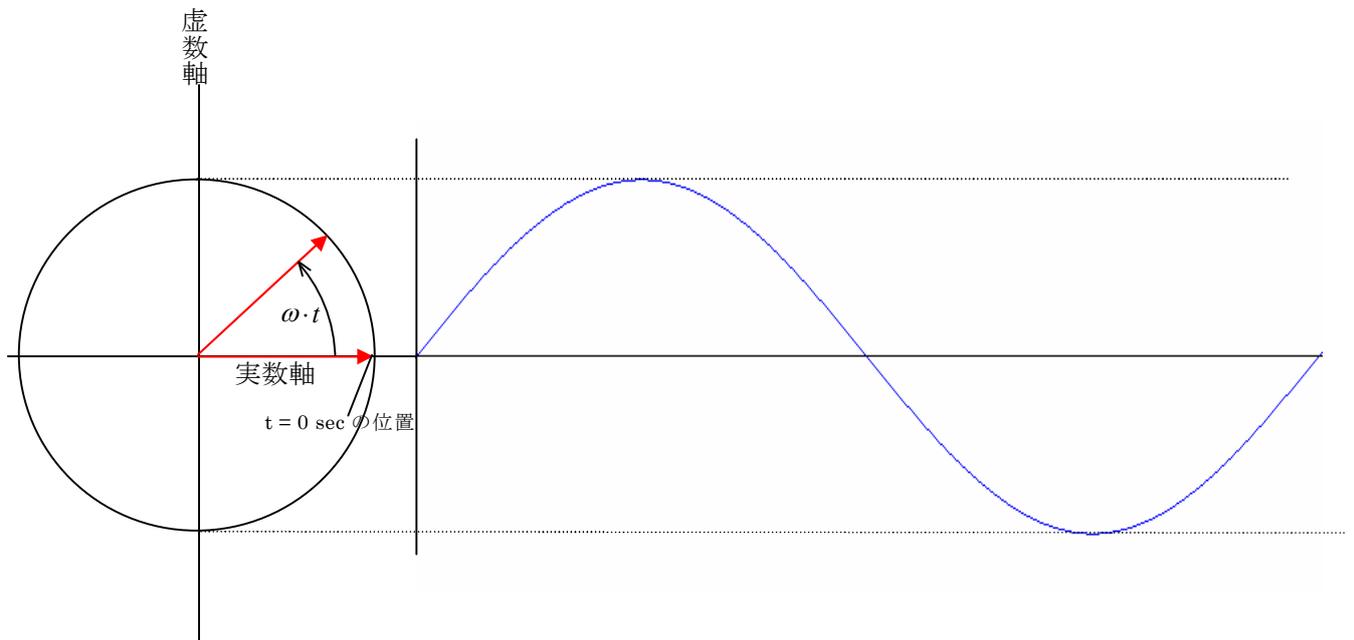
14.2 項に添付した Rev\_Direct\_grounding.lis ファイルの定常解の複素電圧の右側の列がこの極座標表示形式の各ノード電圧の定常解になっています。



11.2 項の議論は上図の回転ベクトルがベースになっています。

上図の回転ベクトルの出発点を 90 度遅らせると虚数軸への投影は次図の如く正弦波形となります。通常は正弦波をベースにして論じる場合が多く、その場合は下図の回転ベクトルで考えて行きます。

3.2 項、11.2 項の議論は下図の回転ベクトルがベースになっています。



ATP で電源電圧を正弦波形にしたい場合は、上記の理由により位相を 90 度遅らせば良いこととなります。具体的には下図のようにすれば ok です。

Component: AC1PH

Attributes

DATA	UNIT	VALUE	NODE	PHASE	NAME
Amplitude	Volt		AC	1	N1
f	Hz	50			
Pha	Deg/Rad	0			
A1		0			
TStart	s	-1			
TStop	s	1000			

ここに-90 と入力すれば正弦波波形になります

Type of source  
 Current  
 Voltage

Hide  
 Lock

## Appendix 2 複素数の除算

複素数の除算

$$\frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} \quad (\text{A2-1}) \quad \text{の演算を考えます。} \quad a, b, c, d \text{ は正の数とします。}$$

まず分子、分母の複素数について考察しておきましょう。

(A2-1)式の分子の絶対値は(A2-2)式のとおりです。

$$\sqrt{(a)^2 + (b)^2} \quad (\text{A2-2})$$

(A2-1)式の方母の絶対値は(A2-3)式の通りです。

$$\sqrt{(c)^2 + (d)^2} \quad (\text{A2-3})$$

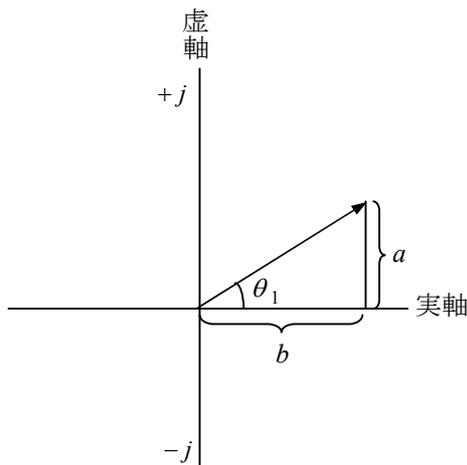
次に分子、分母の複素数の偏角(複素平面の実軸と成す角度)について考察しておきます。

分子の偏角は下図より

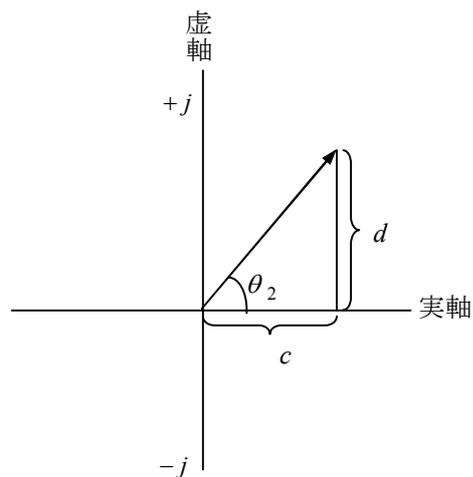
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \quad (\text{A2-4})$$

同様に分母の偏角は

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{d}{c}\right) \quad (\text{A2-5})$$



分子の偏角



分母の偏角

以上をふまえ、次に(A2-1)式の方母を有理化してみましょう。すると

$$\frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} \cdot \frac{c - j \cdot d}{c - j \cdot d} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + j \cdot (b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \quad (\text{A2-6})$$

となり、除算の結果による新しい複素数が得られます。

この(A2-6)式の新し複素数の偏角と絶対値を考察して行きます。

この除算の結果の複素数の大きさ(絶対値)は(A2-6)の実数部と虚数部を各々二乗してその和の平方根ですから次のようになります。

$$\left| \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} \right| = \sqrt{\left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \quad (\text{A2-7})$$

この(A2-7)式から、複素数の除算の結果で得られる複素数の大きさ(絶対値)は(A2-1)式の複素数の商は分子の複素数の絶対値を分母の複素数の絶対値で除したものとなっていることとなります。

(A2-1)式の除算によって得られる新しい複素数の偏角  $\theta_3$  に関して(A2-6)式より次式となります。

$$\tan(\theta_3) = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{a \cdot c + b \cdot d} \quad (\text{A2-8})$$

よって  $\theta_3$  は

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{a \cdot c + b \cdot d}\right) \quad (\text{A2-9}) \quad \text{となります。}$$

(A2-9)式の角度の持つ意味はこのままでは理解しにくいのでもう少しわかりやすい形にしましょう。

次の関数を考えます。

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{A2-10})$$

(A2-10)式を加法定理にしたがって展開すると

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2)} \quad (\text{A2-11}) \quad \text{となります。}$$

$\theta_1$   $\theta_2$  の角度は(A2-4),( A2-5)式で与えられているので(A2-11)式に(A2-4),( A2-5)式を代入して、次式が得られます。

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{d}{c}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) \cdot \tan\left(\arctan\left(\frac{d}{c}\right)\right)} \quad (\text{A2-12})$$

(A2-12)式の内、例えば  $\tan\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)$  の意味するところは「或る偏角  $x$  (rad.) の  $\tan$  を取ると  $\frac{b}{a}$  の値になる偏角  $x$  (rad.) に対して  $\tan$  を取る」ということですから結局

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \frac{b}{a} \quad (\text{A2-13}) \quad \text{となります。同様に}$$

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{d}{c}\right)\right) = \frac{d}{c} \quad (\text{A2-14})$$

(A2-13)( A2-14)式を(12)式に入れて整理すると

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{a \cdot c + b \cdot d} \quad (\text{A2-15})$$

よって(A2-15)式と(A2-8)式を比較すれば、

$$\theta_3 = \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{A2-16})$$

となり、除算による新たな偏角は  $\theta_3$  は分子の複素数の偏角から分母の複素数の偏角を引いた角度になることがわかります。

本稿で取り上げている例題の分子は 1000 V Peak の瞬時を考えているので、1000+j0 で偏角 0 です。これを  $g + j \cdot h$  の形の分母で除するので結果の偏角は  $-\theta_2$  となります。つまり位相は遅れます。